

Инж. Л. И. НЕЙШТАДТ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

*УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ КУРСОВ МАСТЕРОВ
СОЦИАЛИСТИЧЕСКОГО ТРУДА
СТРОИТЕЛЬНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ*

1 9 4 1

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО СТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва

Ленинград

Редактор: канд. техн. наук *Н. Л. Перельштейн*

Настоящая книга является учебным пособием по предмету „Техническая механика“ для курсов мастеров социалистического труда. Книга охватывает основные понятия теоретической и прикладной механики и сопротивления материалов.

Книга предназначена для слушателей курсов мастеров социалистического труда и школ десятичников.

Подп. к печати 26/II. Тираж 8000 экз. Печ. листов 10,5. УИЛ 11,86. Л 11764.
Заказ № 6452. Цена 3 р. 60 к., пер. 1 руб.

1-я тип. Машгиза НКТП. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	6
Часть I. Теоретическая механика	
Введение	7
§ 1. Предмет теоретической механики	—
§ 2. Основатели теоретической механики	—
§ 3. Абсолютно твердое тело и материальная точка	9
§ 4. Силы	11
I. Статика	
Глава 1. Аксиомы статики	14
§ 1. Аксиома I	—
§ 2. Аксиома II	15
§ 3. Аксиома III	—
Глава 2. Силы, прилагаемые к одной точке	17
§ 1. Сложение сил, действующих по одной прямой	—
§ 2. Условие равновесия сил, действующих по одной прямой	19
§ 3. Сложение сил, пересекающихся в одной точке	20
§ 4. Аналитическое определение величины и направления равнодействующей силы	23
§ 5. Разложение силы на две пересекающихся	—
§ 6. Условия равновесия пучка сил	26
Глава 3. Параллельные силы	28
§ 1. Сложение параллельных сил, направленных в одну сторону	—
§ 2. Разложение на параллельные силы	30
§ 3. Сложение двух параллельных сил, направленных в разные стороны	32
§ 4. Пара сил	33
§ 5. Сложение многих параллельных сил	34
§ 6. Центр тяжести	35
§ 7. Центр тяжести симметричного тела	36
§ 8. Центр тяжести несимметричного тела	—
Глава 4. Силы, произвольно расположенные	38
§ 1. Момент силы	—
§ 2. Момент равнодействующей	40
§ 3. Условие равновесия рычага	—
§ 4. Момент пары	42
§ 5. Сложение пар	43
§ 6. Условие равновесия пар	44
§ 7. Приведение системы сил к равнодействующей силе и паре	45
§ 8. Условия равновесия свободного тела	46
§ 9. Условия равновесия несвободного тела	—
§ 10. Приложения методов статики	51

II. Кинематика

Глава 1. Равномерное и переменное движения	57
§ 1. Равномерное движение	—
§ 2. Скорость переменного движения	59
§ 3. Равномерно-переменное движение	—
Глава 2. Поступательное и вращательное движения	62
§ 1. Поступательное движение	—
§ 2. Вращательное движение	63
Глава 3. Передаточные механизмы	64
§ 1. Первая группа передач	65
§ 2. Вторая группа передач	69

III. Динамика

Глава 1. Законы движения	70
§ 1. Первый закон движения	71
§ 2. Второй закон движения	72
§ 3. Третий закон движения	73
Глава 2. Зависимость между силой, массой и ускорением	75
§ 1. Действие постоянной силы на тело, не имеющее начальной скорости	—
§ 2. Действие постоянной силы на тело, имеющее начальную скорость	76
§ 3. Основное уравнение динамики	78
§ 4. Системы единиц измерения	80
Глава 3. Работа и энергия	82
§ 1. Работа	—
§ 2. Мощность	84
§ 3. Кинетическая энергия	86
§ 4. Потенциальная энергия	88
§ 5. Закон сохранения энергии	—
Глава 4. Передача работы в машине	90
§ 1. Золотое правило	—
§ 2. Коэффициент полезного действия машин	91
§ 3. Трение	92
§ 4. Рычаги	95
§ 5. Блоки	97
§ 6. Ворота	100
§ 7. Наклонная плоскость	101
§ 8. Винт	103
§ 9. Клин	105

Часть II. Сопротивление материалов

Введение	107
§ 1. Предмет сопротивления материалов	—
§ 2. Возникновение науки о сопротивлении материалов	—
§ 3. Упругое тело и внутренние силы	108
§ 4. Основные виды деформаций	110
Глава 1. Растяжение и сжатие	113
§ 1. Закон Гука	—
§ 2. Диаграмма растяжения	114
§ 3. Сжатие	116

	Стр.
§ 4. Допускаемые напряжения	116
§ 5. Расчет на растяжение и сжатие	117
§ 6. Смятие	119
Глава 2. Сдвиг	121
§ 1. Срез	—
§ 2. Скалывание	125
Глава 3. Изгиб	126
§ 1. Изгибающий момент и поперечная сила	127
§ 2. Растяжение и сжатие волокон изгибаемой балки	130
§ 3. Напряжения при изгибе	132
§ 4. Определение прочного сечения балки	135
§ 5. Наиболее выгодное сечение бруса. Двутавровое сечение. Составные балки	136
§ 6. Момент инерции	139
Глава 4. Расчет балок	141
§ 1. Балка, заделанная одним концом, несущая сосредоточенную нагрузку	—
§ 2. Балка, заделанная одним концом, несущая равномерно распределенную нагрузку	143
§ 3. Балка, заделанная одним концом, несущая сосредоточенную и равномерно распределенную нагрузки	146
§ 4. Балка, лежащая на двух опорах, несущая сосредоточенную нагрузку	147
§ 5. Балка, лежащая на двух опорах, несущая равномерно распределенную нагрузку	150
§ 6. Балка, лежащая на двух опорах, несущая сосредоточенную и равномерно распределенную нагрузки	152
Глава 5. Кручение. Сложные деформации. Продольный изгиб	154
§ 1. Кручение	—
§ 2. Сложные деформации	156
§ 3. Продольный изгиб	158
Глава 6. Фермы	160
§ 1. Общие сведения	—
§ 2. Определение усилий методом вырезания узлов	163
§ 3. Определение усилий методом статических моментов	166
Приложение	168

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс технической механики должен предшествовать изучению специальных предметов. Однако до сего времени не было учебника технической механики, отвечающего нуждам мастеров социалистического труда стройиндустрии. Поэтому составители учебников по специальным дисциплинам, предназначенных для мастеров социалистического труда, вынуждены были помещать отрывочные сведения например из сопротивления материалов или ограничиваться ссылками на курсы, недоступные обучающимся по своей сложности.

Данный курс технической механики должен восполнить указанный пробел. Курс содержит элементарные понятия теоретической и прикладной механики и сопротивления материалов. Сочетание этих элементов имеет целью научить слушателя расчетам несложных конструкций и пониманию их работы.

Тем самым курс технической механики prepares слушателя к изучению специальных дисциплин. В свою очередь курс базируется на элементарных сведениях из физики, алгебры и геометрии.

В частности изучению теоретической механики должен предшествовать краткий курс физики и средней математики. Изучение сопротивления материалов должно сопровождаться работами в лаборатории, знакомящими слушателей с испытательными машинами и методами определения механических характеристик строительных материалов. Для прочного закрепления методов технической механики необходимо достаточное количество исполненных слушателями упражнений, увязанных с практической деятельностью слушателей.

Текст, напечатанный в книге мелким шрифтом, не является обязательным и служит материалом для дополнительного изучения отдельных вопросов курса и для сообщения слушателям сведений из истории развития науки.

Л. И. Нейштадт

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. ПРЕДМЕТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В теоретической механике изучаются равновесие и движение физических тел.

Являясь одним из отделов физики, теоретическая механика вследствие обширного применения в естествознании и технике выделилась в самостоятельную науку. Ее разделяют на три части: статику, кинематику и динамику.

В статике определяются условия равновесия тел.

В кинематике исследуется движение тел без рассмотрения его причин.

В динамике изучается движение тел в связи с причинами, его определяющими.

В динамике устанавливаются общие законы движения тел.

§ 2. ОСНОВАТЕЛИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Древнейшие из дошедших до нас сочинений по механике написаны греческим философом Аристотелем, жившим в IV в. до нашей эры, т. е. около 2400 лет назад.

Аристотель одну из своих работ о движении и силах назвал Механикой (от греческого слова „механе“, что значит: машина, сооружение). Несмотря на практический смысл этого понятия, Аристотель стремился выяснить причины явлений, относящихся к области механики, не пользуясь наблюдением и опытом. Поэтому многие его выводы ошибочны.

Строгое научное обоснование первого раздела механики-статики дал Архимед.

Величайший ученый древности Архимед родился и жил в г. Сиракузах (Сицилия) в 287—212 г. до нашей эры.

Архимед установил общие принципы статики, основанные на идее центра тяжести, впервые им высказанной и обоснованной. Архимед доказал, что нагруженный рычаг пребывает в равновесии, если расстояния грузов от точки опоры рычага обратно пропорциональны их весам. Именно к этому открытию относятся знаменитые слова Архимеда: „Дайте мне точку опоры и я подниму Землю“.

В течение длительного промежутка времени после смерти Архимеда в области теоретической механики было сделано очень мало. Научная мысль была направлена преимущественно на изобретение и усовершенствование отдельных механизмов и зачастую шла по ложному пути. Работы этого периода не оставили сколько-нибудь заметного следа в деле создания основ теоретической механики.

Переход от средневековья к эпохе, ознаменовавшейся в Западной Европе распадом феодального строя и развитием капиталистического хозяйства,

сопровождался большими изменениями во всех областях экономических отношений.

Возникло много сложных теоретических и практических задач, касавшихся разнообразных отраслей знаний, преимущественно механики.

Некоторые ученые, пытавшиеся эти задачи разрешить, не смогли отказаться от ошибочных положений Аристотеля, работы которого являлись в середине века знаменем всего реакционного, препятствием к развитию науки.

Наряду с этим назрела решительная борьба за новые начала и в другой важной отрасли знания. На протяжении полутора тысяч лет (с II по XVII в.) господствующей системой мира являлась система Птолемея. В ней утверждалось, что Земля — центр мира, что она неподвижна, а вокруг нее движутся Солнце, Луна, планеты и звезды. Эта система была официально одобрена церковью. Все, что противоречило птоломеевой системе, подвергалось преследованию.

В первой половине XVI в. астроном Николай Коперник основал учение о действительной системе мира. Коперник высказал предположение о том, что не Земля, а Солнце является центром, вокруг которого вращаются планеты. Земля является частью солнечной системы, планетой, вокруг которой вращается только Луна. Коперник умер, когда книга его еще только выходила из печати. Учение Коперника, опровергавшее церковно-библейские басни, было враждебно встречено церковью.

Работы Архимеда и Коперника продолжил Галилей, один из величайших ученых всех времен.

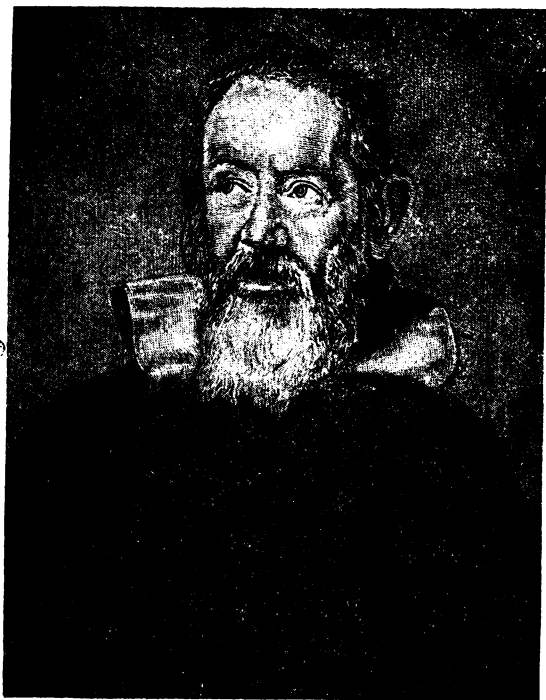
Галилео Галилей родился 15 февраля 1564 г. в итальянском городе Пизе в семье бедного музыканта. 17 лет Галилей поступил в Пизанский университет, где изучал философию, математику, физику и познакомился с работами Коперника.

Вскоре по окончании университета молодой Галилей назначается в нем профессором математики. В своих лекциях он открыто выступает сторонником Коперника и одновременно опровергает различные положения Аристотеля. Так например, опыты Галилея показали, что различные тела падают с одинаковой скоростью, не зависящей от веса тела (тогда как Аристотель утверждал, что чем тяжелее тело, тем быстрее его падение).

В 1610 г. Галилей усовершенствовал телескоп и сделал замечательные открытия. Наблюдая планету Юпитер, Галилей увидел целый мир: громадную планету вокруг которой движутся четыре спутника.

Своими открытиями Галилей подтвердил правильность учения Коперника. В ответ на это церковь объявила учение Коперника еретическим, угрожая наказаниями за его распространение.

В 1632 г., когда слава Галилея распространилась далеко за пределами Италии, ему удалось опубликовать свое знаменитое сочинение „Диалог о двух системах мира — Птолемея и Коперника“.



Галилей 1564 – 1642 г.

Благодаря глубоким доказательствам правильности системы Коперника уничтожающей критике системы Птоломея, сочинение Галилея сделалось мощным оружием в руках его единомышленников.

За эту книгу Галилей был отдан под суд инквизиции. Галилея присудили к тюремному заключению. Потом заключение заменили проживанием под надзором церкви.

Слепота, постигшая Галилея в результате всех потрясений, и общее болезненное состояние не сломили его. Он продолжал свое дело. Именно в этот период им было закончено последнее сочинение — итог многолетних работ. Напечатанное в Голландии друзьями Галилея, оно называлось „Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению“¹.

В предисловии современник Галилея характеризует содержание и значение книги следующими словами:

„Автор открыл две новые науки и доказал их принципы и основания.

Одна из наук касается... движения падающих тел, по поводу которого автором изложено множество удивительных случаев, остававшихся до сего времени никем не открытыми или не доказанными.

Другая наука... касается сопротивления, оказываемого твердыми телами силе, стремящейся их сломить, и также изобилует примерами и предложениями, которые до сих пор никем не были замечены.

Познания такого рода весьма полезны в науке и искусстве механики.

Настоящим сочинением мы лишь открываем двери этим двум новым наукам..., которые в дальнейшем могут быть без конца развиваемы позднейшими исследованиями“.

Таким образом Галилей основал науку о движении — кинематику и динамику.

Открытием науки о сопротивлении материалов Галилей заложил фундамент современной инженерной науки.

Продолжателем трудов Галилея явился Ньютон.

Исаак Ньютон родился в 1643 г. в английской деревушке Улсторп, через год после смерти Галилея. Учиться начал в деревенской школе, затем поступил в городскую школу, но через 4 года из-за недостатка средств вернулся в деревню.

Стремясь продолжить свое образование, Ньютон добился спустя некоторое время поступления в Кембриджский университет в разряд неимущих студентов.

По окончании университета Ньютон остался в нем профессором математики и в последующие 30 лет создал свои важнейшие труды. Ньютон умер в 1727 г.

Открытия Ньютона велики и разнообразны. К числу наиболее выдающихся принадлежат: открытие закона всемирного тяготения; открытие нового раздела математики (исчисление бесконечно малых).

Результаты своих важнейших исследований Ньютон изложил в знаменитой книге под заглавием „Математические начала натуральной философии“². В ней Ньютон, опираясь на работы Галилея, Кеплера и на свои наблюдения, подверг грандиозному обобщению проблемы динамики и установил, что планеты („небесные тела“), так же как и тела земные, подвержены единым законам движения.

Построение классической механики было трудами Ньютона в основном закончено.

§ 3. АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО И МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА

Абсолютно твердым телом называется тело, расстояния между частицами которого всегда остаются неизменными.

¹ Перевод книги на русский язык выпущен Государственным техническим издательством в 1934 г.

² Перевод этой книги с латинского на русский язык, сделанный акад. А. Н. Крыловым, напечатан впервые в 1915—1916 гг.

В природе таких тел не существует.

Все тела при известных условиях испытывают хотя бы небольшие изменения формы (деформации). Однако во многих случаях с незначительными деформациями можно не считаться и рассматривать тела как абсолютно твердые.

В теоретической механике, говоря о теле, мы будем иметь в виду абсолютно твердое тело.

Чтобы еще больше облегчить изучение законов механики, вводится понятие о материальной точке.

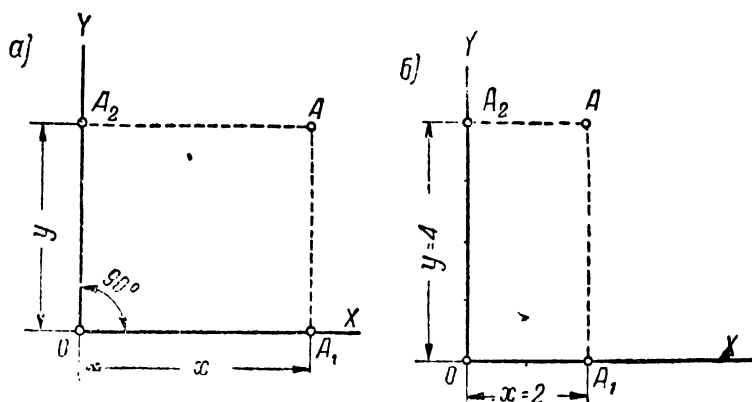


Рис. 1. Координаты точки.

Материальной точкой называют весьма малую материальную частицу, размерами которой можно пренебречь; в этом случае при рассмотрении действия сил исключается влияние величины и формы тела.

Положение точки на плоскости определяется следующим образом.

Выбирают две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY , называемые осями координат. Точка O их пересечения называется началом координат (рис. 1, а).

Возьмем какую-нибудь точку A в плоскости координат; опустим из этой точки перпендикуляры на оси координат. Получим на осях точки A_1 и A_2 — проекции точки A .

Расстояния x и y точек A_1 и A_2 от начала O , выраженные в определенных единицах измерения, называются координатами точки A .

Зная координаты точки, мы всегда можем определить ее положение на плоскости.

Пусть даны координаты точки $x = 2$ см; $y = 4$ см. Откладывая по оси OX отрезок OA_1 , равный 2 см, получим точку A_1 — проекцию искомой точки A на ось OX ; откладывая по оси OY отрезок OA_2 , равный 4 см, получим A_2 — проекцию искомой точки на ось OY . Из точек A_1 и A_2 восстановим перпендикуляры, в пересечении которых получим искомую точку A (рис. 1, б).

§ 4. СИЛЫ

Силой называется причина, заставляющая тело выйти из состояния покоя, в котором оно находится, или изменить характер движения, которое оно совершает. Эта причина проявляется при действии одного тела на другое непосредственно при их соприкосновении или на расстоянии.

Примером силы является сила тяжести.

Силой тяжести или весом тела называется сила, с которой всякое тело, находящееся вблизи земной поверхности, притягивается землей.

Силы, действующие на материальные точки тела, разделяются на две группы: силы внешние и силы внутренние. Внешними называются силы, испытываемые материальными точками данного тела со стороны других тел. Например груз, расположенный на балке, является внешней силой по отношению к балке.

Внутренними называются силы взаимодействия между материальными точками данного тела, например между частицами материала балки. Внутренние силы изучаются в теории сопротивления материалов.

В теоретической механике рассматривают только внешние силы и притом независимо от источника их возникновения.

Действующие на тело силы вполне определяются тремя элементами: точкой приложения, направлением и величиной.

Точкой приложения силы называют ту материальную точку, на которую сила непосредственно действует.

Направлением силы называется направление прямой, по которой сила стремится сдвинуть точку своего приложения.

Понятие о величине силы получается из сравнения данной силы с силой, принятой за единицу меры.

Приняв какую-нибудь силу за единицу меры, например силу притяжения земли на 1 кг вещества, определяя величину неизвестной силы, находя из скольких сил, равных 1 кг каждая, состоит неизвестная сила.

Для практического определения величины силы употребляются различные приборы, называемые динамометрами (силомерами).

Простейшим динамометром являются обыкновенные пружинные весы (рис. 2). С помощью этих весов можно измерять не только силу тяжести (грузы), но и другие силы. Например, чтобы измерить мускульную силу, вытягивают за кольцо пружину укрепленного динамометра. Отсчитывая показания динамо-

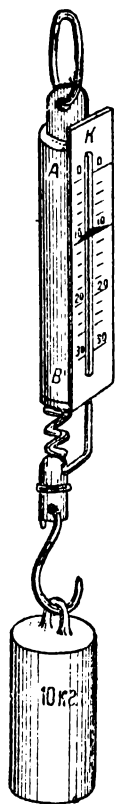


Рис. 2. Простейший динамометр—пружинные весы.

метра, мы определяем силу в тех единицах, которые нанесены на его шкале.

Всякая физическая величина, имеющая не только численное значение, но и направление, называется векториальной величиной, или вектором. Сила также является вектором.

Изложенное позволяет установить следующее простое изображение любой силы на чертеже. Через точку приложения A проводят по направлению силы прямую линию и откладывают на ней отрезок AB , заключающий в себе столько условных делений, скольким килограммам соответствует сила. Направление силы указывает стрелка на конце отрезка (рис. 3).

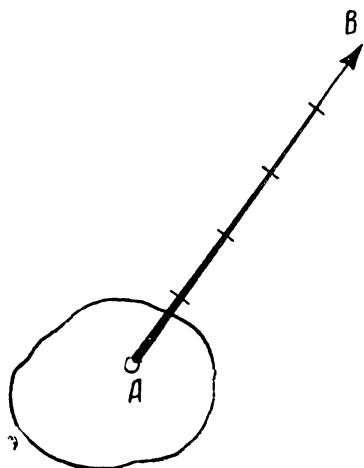


Рис. 3. Вектор.

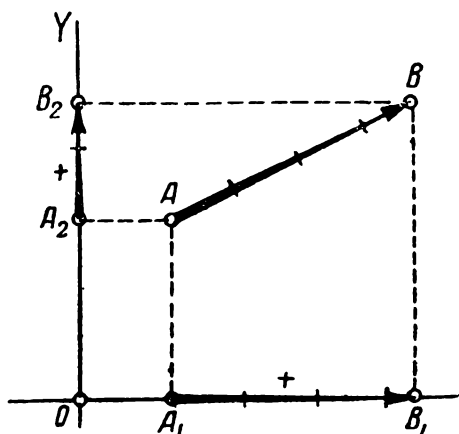


Рис. 4. Проекции вектора.

На рис. 3 сила соответствует 5 кг , поэтому и отложено 5 условных делений, полагая, что каждое деление соответствует 1 кг .

Опустим из точек A и B вектора перпендикуляры на оси координат (рис. 4). Отрезки A_1B_1 и A_2B_2 называются проекциями вектора. Проекции различаются по величине и направлению; проекции, направленные по оси X вправо, условились считать положительными и обозначать со знаком плюс (+); проекции, направленные влево, считаются отрицательными и обозначаются со знаком минус (-).

Точно так же условились направленные по оси Y вверх проекции считать положительными, а направленные вниз — отрицательными.

В нашем случае обе проекции: A_1B_1 и A_2B_2 — положительны.

Положение вектора на плоскости вполне определится положением двух его проекций.

Допустим, даны проекции вектора A_1B_1 и A_2B_2 . Восстанавливаем из точек A_1A_2 и B_1B_2 перпендикуляры, пересечение которых определит точки вектора A и B , начало и конец его. Величина проекций вектора измеряется, так же как и длина дан-

ного вектора, в условных единицах; например 1 см длины проекции обозначает силу в 1 кг.

Будем вращать вектор AB вокруг точки A наподобие стрелки часов.

При вертикальном направлении вектора AB (рис. 5) проекция его на ось X представляет собой точку, т. е. равна нулю, а проекция на ось Y равна длине вектора. По мере отклонения вектора от вертикали его проекция на ось X будет возрастать, а проекция на ось Y убывать. Когда вектор располо-

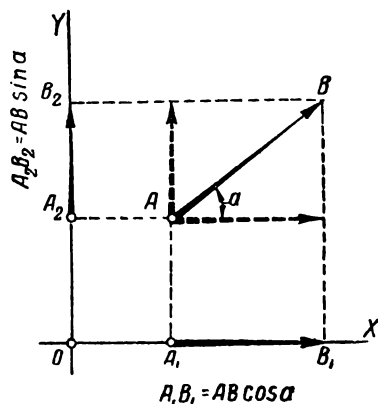
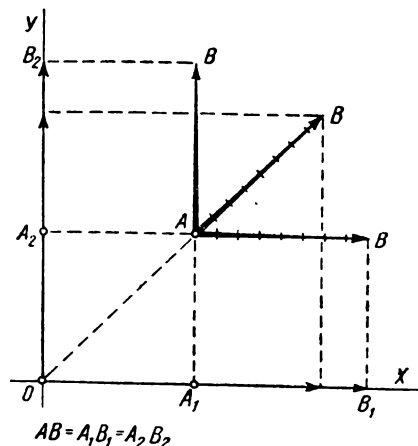


Рис. 5. Изменение проекций вектора по мере его вращения вокруг точки приложения.

Рис. 6. Аналитическое определение проекций вектора.

жен под углом в 45° к горизонту, обе его проекции равны между собой. При горизонтальном направлении вектора проекция на ось Y равна нулю; проекция на ось X равна длине вектора.

Величины проекций мы узнавали с помощью построения, т. е. графически, но чаще их определяют с помощью вычислений, т. е. аналитически, согласно правилам тригонометрии.

Величина проекции вектора может быть определена аналитически, если дан угол α наклона вектора к одной из осей, например X (рис. 6).

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos \alpha; \quad A_2B_2 = AB \cdot \sin \alpha.$$

Допустим $AB = 5$; $\alpha = 30^\circ$. Тогда $\cos 30^\circ = 0,866$; $\sin 30^\circ = 0,5$, $A_1B_1 = 5 \cdot 0,866 = 4,33$; $A_2B_2 = 5 \cdot 0,5 = 2,5$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем заключается предмет теоретической механики?
2. Назовите разделы теоретической механики.
3. Какие тела рассматривают в теоретической механике?
4. Что такое материальная точка?
5. Как определить положение точки на плоскости?
6. Что называют силой в теоретической механике?
7. Почему сила называется векторной величиной?
8. Как определить проекцию вектора?

I. СТАТИКА

Основной задачей статики является изучение условий равновесия сил, приложенных к телу. Это изучение основывается на аксиомах статики.

Глава 1. АКСИОМЫ СТАТИКИ

Аксиомой называется истина, установленная в результате многих наблюдений и не требующая доказательств вследствие своей очевидности.

Присущие данной науке аксиомы служат основанием для развития дальнейших ее положений.

Изложение общих аксиом теоретической механики будет дано в динамике, а здесь мы ограничиваемся аксиомами, необходимыми для обоснования статики.

§ 1. АКСИОМА I

Первая аксиома статики устанавливает условие равновесия двух сил, приложенных к твердому телу.

Аксиома I. Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравниваются тогда, когда они равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 7).

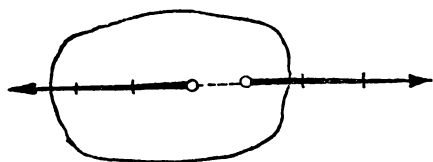


Рис. 7. Равновесие двух сил.

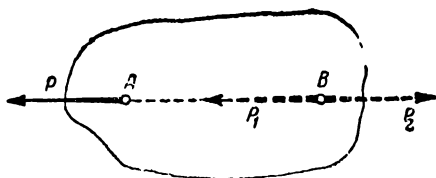


Рис. 8. Перенесение силы по ее направлению.

Эти силы, действуя на тело совместно, не производят движения; прибавление и отбрасывание их не нарушают равновесия тела.

Совершенно очевидно, что приложенные уравновешенные силы растягивают или сжимают тело, и если силы достаточно велики, они могут даже разрушить его.

Поэтому в конечном счете отнюдь не безразлично, присутствуют ли уравновешенные силы или нет. Но мы хотим прежде всего знать, при каких внешних условиях будет находиться твердое тело в равновесии, а потому не займемся пока о других явлениях, одновременно происходящих в самом теле.

Изложенное позволяет обосновать следующее правило:

Точку приложения силы, действующей на твердое тело, можно переносить по направлению силы, не изменяя ее действия.

Это правило доказывают следующим образом.

Пусть на точку A данного тела действует сила P (рис. 8). Продолжаем направление силы P , проводя прямую AB . На этой линии берем какую-нибудь точку B и утверждаем, что ее можно принять за новую точку приложения силы P . Действительно, мы имеем право приложить в точке B две силы P_1 и P_2 , равные силе P и направленные по прямой AB , поскольку эти силы взаимно уравновешиваются. Теперь мы имеем три силы: P , P_1 и P_2 , из них мы можем отбросить P и P_2 , так как и они взаимно уравновешиваются. Остается одна сила P_1 , действующая на точку B , которая производит такое же действие, как и сила P .

§ 2. АКСИОМА II

Аксиома II. Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Другими словами, если тело A действует на тело B с некоторой силой, то B в свою очередь действует на A с некоторой силой в противоположном направлении. Одна из этих сил именуется действием, а другая — противодействием.

Наблюдение показывает, что эти силы всегда равны.

Рассмотрим пружинные весы, нагруженные гирей. Растянутая пружина действует на гирю с некоторой силой, стремясь ее приподнять; одновременно вес гири действует на пружину, стремясь ее растянуть. Эти две силы равны; если бы они не были равны, то происходило бы поднятие или опускание гири.

Приведем особенно важный для дальнейшего изучения случай взаимодействия уравновешенных сил.

Представим себе балку, лежащую горизонтально на двух опорах A и B (рис. 9). Балка производит давление на опоры. Эти давления P и Q направлены вертикально вниз. В точках соприкосновения балки с опорами приложены к балке силы P_1 и Q_1 , которые представляют действие опор на балку. Силы P_1 и Q_1 называются опорными реакциями. Они равны соответственно давлениям P и Q , но направлены вертикально вверх.

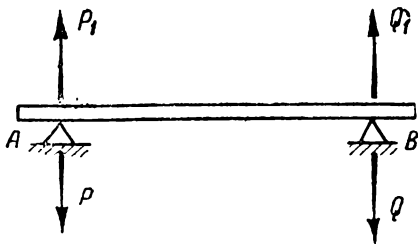


Рис. 9. Опорные реакции балки.

§ 3. АКСИОМА III

Силы, действующие на тело, можно во многих случаях заменить одной силой, которая оказывает такое же действие, как все данные силы. Заменяющая сила называется равнодействующей; заменяемые силы называются составляющими или слагаемыми.

Нахождение равнодействующей силы по данным составляющим носит название сложения сил.

Замена одной силы составляющими силами называется разложением силы.

Третья аксиома устанавливает величину и направление равнодействующей двух сил, приложенных под углом к одной точке.

Аксиома III. Две силы P и Q , действующие под углом на одну и ту же точку приложения (A), имеют равнодействующую (R), которая проходит через ту же точку приложения и равна по вели-

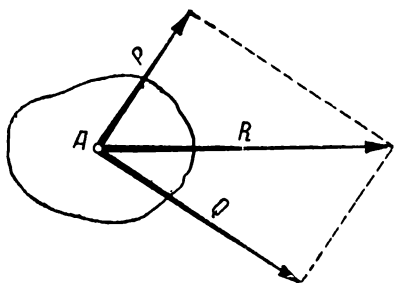


Рис. 10. Параллелограм сил.

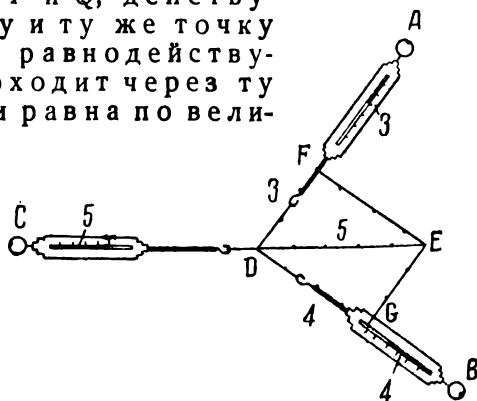


Рис. 11. Построение параллелограмма сил посредством динамометров.

чине и направлению диагонали параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 10).

Следующий простой опыт обосновывает сказанное.

Возьмем трое пружинных весов (динамометров), укрепленных в трех точках A , B и C (рис. 11). Как показывают весы,

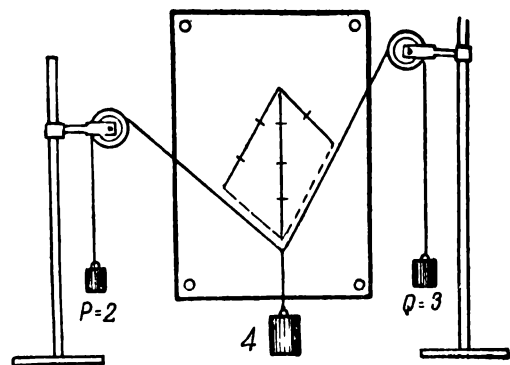


Рис. 12. Построение параллелограмма сил посредством грузов.

в точке D приложена сила DF , равная 3 кг, и сила DG , равная 4 кг, направления которых образуют прямой угол.

Эти две силы уравновешиваются натяжением пружины весов в точке C , равным 5 кг. Сила DC равна и прямо противоположна силе DE , то же равной 5 кг, которая и представляет искомую равнодействующую.

На чертеже эта равнодействующая предста-

вляется диагональю DE прямоугольника $DFEG$.

На рис. 12 изображен другой прибор, посредством которого также легко установить правило параллелограмма сил. Пусть гири в 2 и 3 кг, подвешенные на нитях, перекинутых через небольшие блоки, уравновешиваются гирей в 4 кг. Тогда равная

и прямопротивоположная ей сила в 4 единицы представляет равнодействующую данных сил.

На приложенной сзади прибора бумаге видно, что направление равнодействующей совпадает с диагональю параллелограмма, сторонами которого служат отрезки в 2 и 3 единицы длины, причем длина диагонали равна четырем единицам длины.

Вообще уравнивающая данных сил по величине равна равнодействующей этих сил и направлена в прямопротивоположную сторону.

Таким образом, если известна уравнивающая данных сил, мы можем найти равнодействующую силу.

Опираясь на вышеизложенные аксиомы, рассмотрим в последующих главах условия равновесия различных сочетаний сил.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется аксиомой?
2. Определите условие равновесия системы из двух сил.
3. Произойдет ли изменение равновесия тела от присоединения уравнивающих сил?
4. Изменяются ли условия равновесия тела при перенесении силы по линии ее действия?
5. Подвергается ли уложенная на опору балка действию со стороны опоры?
6. Какая сила называется равнодействующей данной системы?
7. Как определить равнодействующую силу, зная величину и направление уравнивающей?

Глава 2. СИЛЫ, ПРИЛАГАЕМЫЕ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

§ 1. СЛОЖЕНИЕ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ПО ОДНОЙ ПРЯМОЙ

Сложение двух сил

Пусть на точку приложения A данного тела действуют в одну сторону силы P и Q (рис. 13,а). Они могут быть заме-

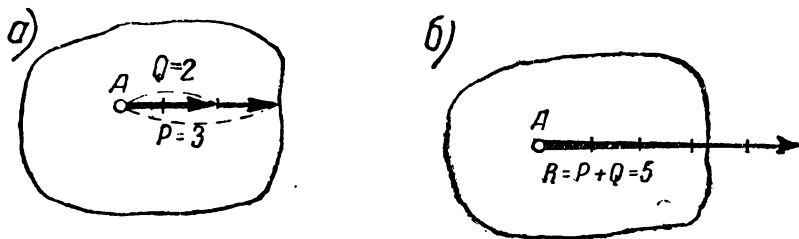


Рис. 13. Сложение двух сил, направленных в одну сторону по одной прямой.

нены равнодействующей силой, равной их сумме. Например сила $P=3$ кг, а сила $Q=2$ кг (рис. 13,б):

$$R = P + Q = 5 \text{ кг.}$$

Такое сложение сил наглядно произойдет, если на крючок пружинных весов повесить гирию в 2 кг, а затем добавить гирию в 3 кг.

Если силы $P=3$ кг и $Q=2$ кг (рис. 14,а) действуют на тело в противоположные стороны, то мы найдем равнодействующую следующим образом. Большую силу P заменим двумя силами: $Q_1=2$ кг и силой $P-Q_1=3$ кг— 2 кг= 1 кг. Заметим, что сила Q_1 , действующая на тело вправо, равна данной силе Q , действующей влево, с ней уравнивается и может быть вместе с ней отброшена. Остается только действующая направо сила $P-Q_1=P-Q=1$ кг (рис. 14,б).

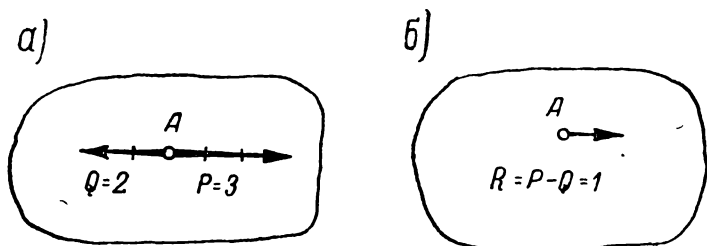


Рис. 14. Сложение двух сил, направленных в противоположные стороны по одной прямой.

Следовательно $R=P-Q=3$ кг— 2 кг= 1 кг, т. е. равнодействующая равняется разности сил.

Сложение многих сил

Перейдем к случаю многих сил, действующих по одной прямой на одну и ту же точку приложения.

Пусть направо действуют силы: $P=5$ кг; $Q=4$ кг и $S=3$ кг, а налево силы: $T=2$ кг и $F=1$ кг (рис. 15,а).

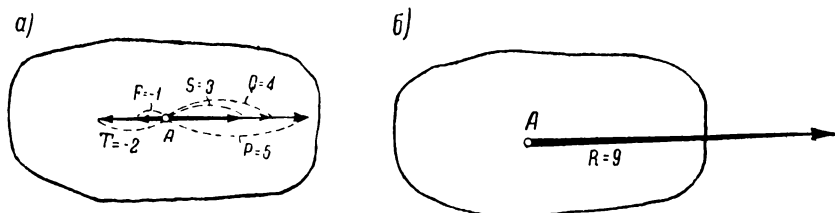


Рис. 15. Сложение сил, приложенных в одной точке и направленных по одной прямой (равнодействующая направлена вправо).

Сложим сначала все силы, действующие направо, — получим равнодействующую $P+Q+S=5$ кг+ 4 кг+ 3 кг= 12 кг. Потом сложим все силы, действующие налево, — получим силу $T+F=2$ кг+ 1 кг= 3 кг. После этого пользуемся сложением двух сил, действующих в противоположные стороны; получаем:

$$R=(P+Q+S)-(T+F)=12$$
 кг— 3 кг= 9 кг.

Равнодействующая направлена вправо (рис. 15,б). Силы, направленные вправо, условно обозначаются со знаком плюс (+)

(положительные величины); направленные влево — со знаком минус (—) (отрицательные величины).

Напомним из алгебры, что сумма, в которой слагаемые могут быть величинами положительными и отрицательными, называется алгебраической суммой, тогда как в арифметической сумме слагаемые — всегда числа положительные.

Поэтому мы можем не складывать в отдельности положительные и отрицательные силы, а выписать их совместно в виде алгебраической суммы:

$$P + Q + S - T - F = 5 + 4 + 3 + (-2) + (-1) = \\ = 5 + 4 + 3 - 2 - 1 = 9 \text{ кг.}$$

Из всего сказанного вытекает следующее правило сложения сил, действующих по одной прямой:

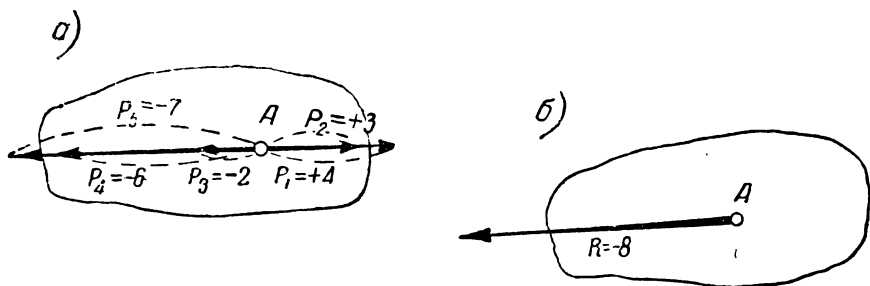


Рис. 16. Сложение сил, приложенных в одной точке и направленных по одной прямой (равнодействующая направлена влево).

Равнодействующая двух сил, действующих в одну сторону, равна их сумме и действует в ту же сторону. Равнодействующая двух сил, действующих в противоположные стороны, равна разности сил и действует в сторону большей. Равнодействующая многих сил выражается их алгебраической суммой.

Мы предполагали, что все силы действуют на одну и ту же точку приложения. Если они действуют на разные точки по прямой, то надо сначала перенести все силы в одну точку, потом складывать их по указанному правилу.

Пример. Найти равнодействующую сил, изображенных на рис. 16, а.

Решение. $R = +4 + 3 - 2 - 6 - 7 = -8$ (кг).

Равнодействующая направлена влево (рис. 16, б).

§ 2. УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ПО ОДНОЙ ПРЯМОЙ

Выше мы рассмотрели два примера сложения многих сил; в них получены равнодействующие силы, направленные в первом примере вправо, во втором — влево. Очевидно, возможен и

*

такой случай, когда сумма слагаемых сил, направленных вправо, будет равна сумме слагаемых сил, направленных влево. Согласно первой аксиоме силы будут находиться в равновесии; равнодействующая их равна нулю.

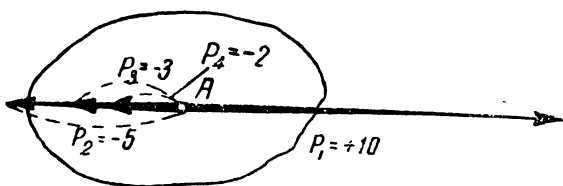


Рис. 17. Сложение сил, приложенных в одной точке и направленных по одной прямой (равнодействующая равна нулю).

Пример. Найти равнодействующую сил, изображенных на рис. 17.

Решение.

$$R = 10 - 5 - 3 - 2 = 0.$$

Равнодействующая равна нулю; силы находятся в равновесии.

На основании изложенного можно установить общее условие равновесия сил, действующих по одной прямой:

Силы, направленные по одной прямой, находятся в равновесии, если их алгебраическая сумма, т. е. равнодействующая, равна нулю.

Алгебраическая сумма обозначается прописной греческой буквой Σ (сигма). Поэтому условия равновесия можно кратко написать так:

$$\Sigma P = 0,$$

где P — общее обозначение действующих сил.

§ 3. СЛОЖЕНИЕ СИЛ, ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

Сложение двух сил

Равнодействующая двух пересекающихся сил определяется на основании третьей аксиомы диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.

Построение параллелограмма сил может быть заменено построением треугольника сил. Положим в точке A приложены две силы P и Q (рис. 18).

Из конца B силы P проведем отрезок BC , равный и параллельный силе Q и направленный

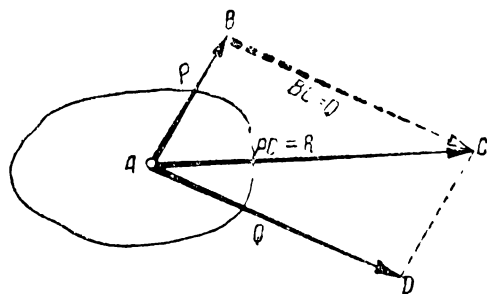


Рис. 18. Построение треугольника сил.

в ту же сторону, что сила Q . Соединим точку A с концом C только что построенного отрезка. Отрезок AC изображает равнодействующую R данных сил, так как AC есть не что иное, как диагональ параллелограмма $ABCD$. Обратим внимание на правило

стрелок в треугольнике сил: составляющие силы P и Q направлены в одну сторону по обводу треугольника сил; равнодействующая R направлена в обратную сторону.

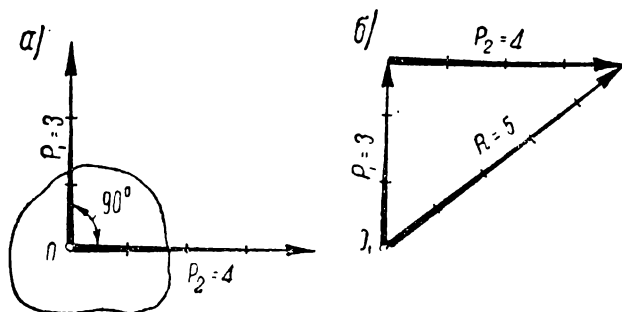


Рис. 19. Сложение сил посредством треугольника сил.

Пример. Определить равнодействующую и уравнивающую двух сил: $P_1 = 3$ кг и $P_2 = 4$ кг, действующих на точку O под прямым углом (рис. 19,а).

Решение. Для определения равнодействующей построим треугольник сил.

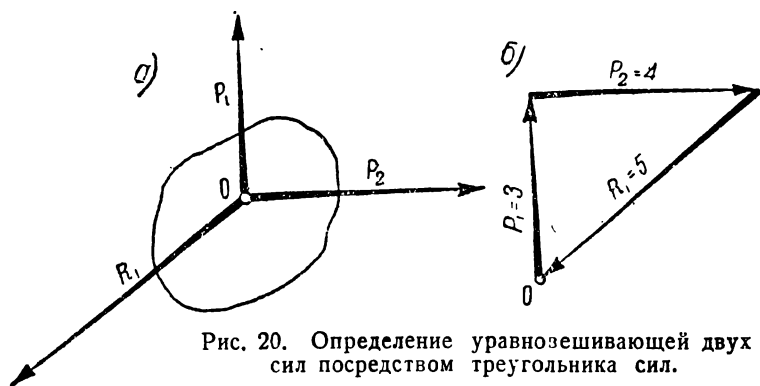


Рис. 20. Определение уравнивающей двух сил посредством треугольника сил.

От произвольной точки O_1 откладываем последовательно данные силы P_1 и P_2 . Отрезок, соединяющий конец силы P_2 с точкой O_1 , т. е. замыкающая сторона треугольника, и будет искомая равнодействующая сила. Измерив в масштабе величину R , находим, что она равняется 5 кг (рис. 19,б). Направление равнодействующей определяется согласно правилу стрелок.

Уравнивающая равна и противоположна равнодействующей (рис. 20,а). В треугольнике сил это выразится изменением направления стрелки (рис. 20,б).

Сложение многих сил

Положим, что на точку A данного тела действуют несколько различно направленных сил P , P_1 , P_2 и P_3 (рис. 21,а). Чтобы определить их равнодействующую, складываем сначала силу P

с силой P_1 по правилу параллелограмма сил, получаем равнодействующую R_1 ; затем складываем R_1 с силой P_2 . Равнодействующую этих сил R_2 складываем с силой P_3 . Получаем окончательно равнодействующую $AE = R$.

Можно получить равнодействующую, не прибегая к вышеуказанному построению, а пользуясь правилом силового многоугольника. Это правило формулируется следующим образом:

Равнодействующая многих сил, пересекающихся в одной точке, выражается по величине и направлению замыкающей стороной разомкнутого многоугольника, все стороны которого равны и параллельны слагаемым силам (рис. 21,б).

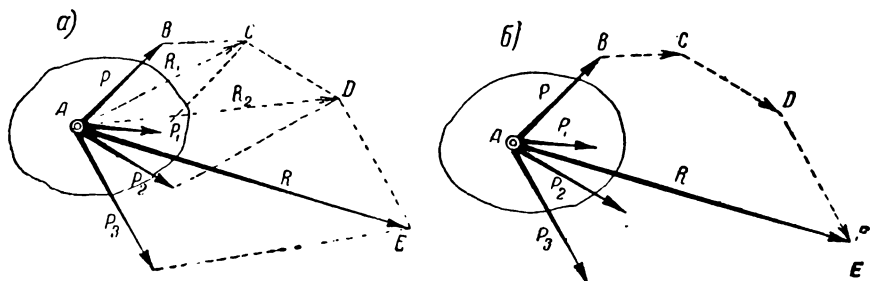


Рис. 21. Сложение нескольких сил, пересекающихся в одной точке:

а — посредством параллелограмма сил; б — посредством силового многоугольника.

Действительно, рассматривая многоугольник $ABCDE$ (рис. 21,б), мы замечаем, что в нем сторона AB представляет силу P ; стороны BC , CD , DE соответственно равны и параллельны силам P_1 , P_2 и P_3 .

Замыкающая сторона AE представляет по величине и направлению равнодействующую силу R . При этом на рис. 21,б видно по стрелкам, что направление равнодействующей AE противоположно направлению сторон разомкнутого многоугольника.

Сложение векторов (в данном случае сил) по правилу многоугольника называется геометрическим сложением, а вектор, представляющий замыкающую сторону, называется геометрической суммой данных векторов.

Силы, пересекающиеся в одной точке, называются кратко пучком сил.

Таким образом можно сказать, что равнодействующая пучка сил равна геометрической сумме всех слагаемых сил.

Мы предполагаем, что все силы приложены в одной точке. Если в одной точке пересекаются только направления сил, необходимо сначала перенести все силы по направлениям в точку пересечения, а потом их складывать, следуя указанному правилу.

§ 4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ И НАПРАВЛЕНИЯ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЫ

Величину равнодействующей мы определили графически с помощью построения параллелограмма. Можно определить эту величину вычислением, т. е. аналитически.

Положим, что надо сложить силы P и Q , действующие на точку приложения A и образующие между собой угол C (рис. 22). Построим параллелограмм $ABCD$ и определим его диагональ $AC = R$. Назовем через a и b неизвестные углы, которые образует равнодействующая R с силами Q и P . Из треугольника имеем формулу для выражения квадрата стороны:

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos(\pi - c);$$

но

$$\cos(\pi - c) = -\cos c.$$

Поэтому

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos c. \quad (1)$$

По этой формуле определяется величина равнодействующей силы. Направление этой силы находится с помощью углов a и b .

Для отыскания этих углов напишем, что в треугольнике ACD отношения синусов углов к противолежащим сторонам одинаковы, т. е.:

$$\frac{\sin a}{P} = \frac{\sin b}{Q} = \frac{\sin(\pi - c)}{R}.$$

Но

$$\sin(\pi - c) = \sin c.$$

Следовательно

$$\frac{\sin a}{P} = \frac{\sin b}{Q} = \frac{\sin c}{R}. \quad (2)$$

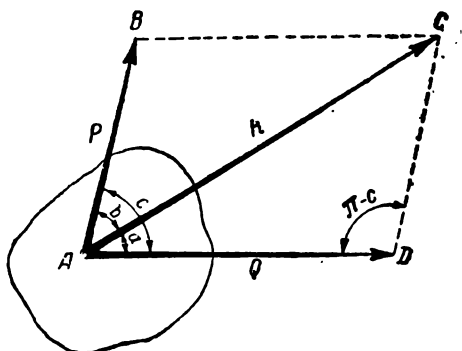


Рис. 22. Аналитическое определение равнодействующей силы.

В формуле (2) $\sin c$ есть данная величина, R определяется по формуле (1), поэтому $\sin a$ и $\sin b$ найдутся по данным величинам P и Q .

В частном случае, когда составляющие силы P и Q образуют между собой прямой угол, величину равнодействующей вычисляют по теореме Пифагора.

Пример. Найти величину равнодействующих двух сил $P = 8$ кг и $Q = 6$ кг, действующих на точку по взаимно перпендикулярным направлениям.

Решение. $R = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (кг).

§ 5. РАЗЛОЖЕНИЕ СИЛЫ НА ДВЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ

Разложение силы на две составляющие сводится к задаче построения параллелограмма сил, в котором данная сила является диагональю. Существует однако множество параллелограммов, имеющих одну и ту же диагональ (рис. 23). Поэтому необходимы дополнительные условия, например направления искомых сил.

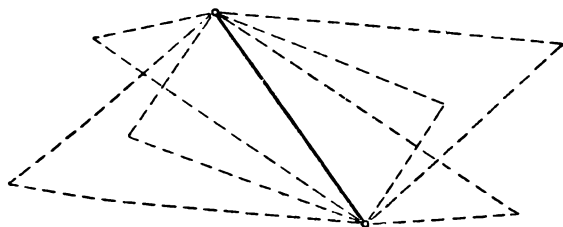


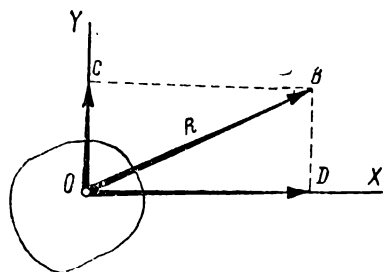
Рис. 23. Множество параллелограммов имеет одну и ту же диагональ.

Существует однако множество параллелограммов, имеющих одну и ту же диагональ (рис. 23). Поэтому необходимы дополнительные условия, например направления искомых сил.

При сложении сил выяснилась возможность заменить построение параллелограмма построением треугольника сил.

Такая замена возможна и при разложении силы.

Пример 1. Разложить данную силу R на две силы P и Q , направленные по осям OX и OY (рис. 24).



Решение. Проводим из конца B силы R прямую $BC \parallel OY$ и $BD \parallel OX$. Получим параллелограм $OCBD$, в котором OC и OD — искомые силы P и Q .

По существу такое разложение мы производили, когда проектировали силы на оси координат (введение, § 4). Это было разложение по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

Рис. 24. Разложение силы на две составляющие посредством параллелограмма сил.

(рис. 25). Разложить данное усилие на составляющие P и Q по направлениям X и Y .

Решение. Строим треугольник сил и определяем составляющие по масштабу $P = 3,5 \text{ т}$; $Q = 2,0 \text{ т}$.

Пример 3. Грузенная вагонетка весом $1,5 \text{ т}$ поднимается лебедкой на эстакаду (рис. 26). Определить усилие в канате.

Решение. Сила тяжести в $1,5 \text{ т}$ действует вертикально вниз. Разложим ее на две со-

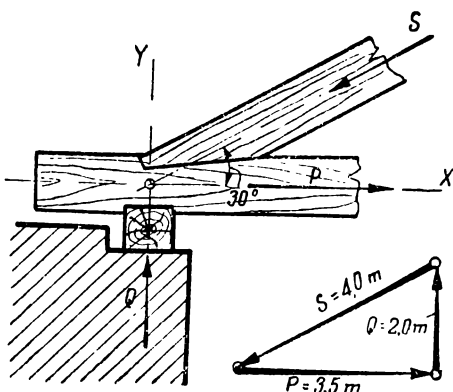


Рис. 25. Разложение силы на две составляющие по двум направлениям посредством треугольника сил.

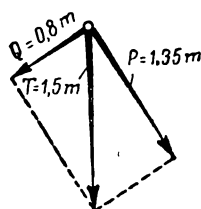
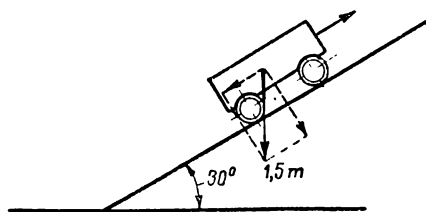


Рис. 26. Разложение силы по двум направлениям.

ставляющие: P — перпендикулярную полотну дороги и Q — параллельную ему.

Сила P прижимает вагонетку к рельсам; сила Q стремится сдвинуть вагонетку вниз и производит натяжение каната.

Строим параллелограм сил и определяем составляющую Q по масштабу — $Q = 0,8 \text{ т}$.

Пример 4. Определить усилия S_1 и S_2 в брусках AB и BC кронштейна ABC под действием груза $P = 300 \text{ кг}$ (рис. 27,а).

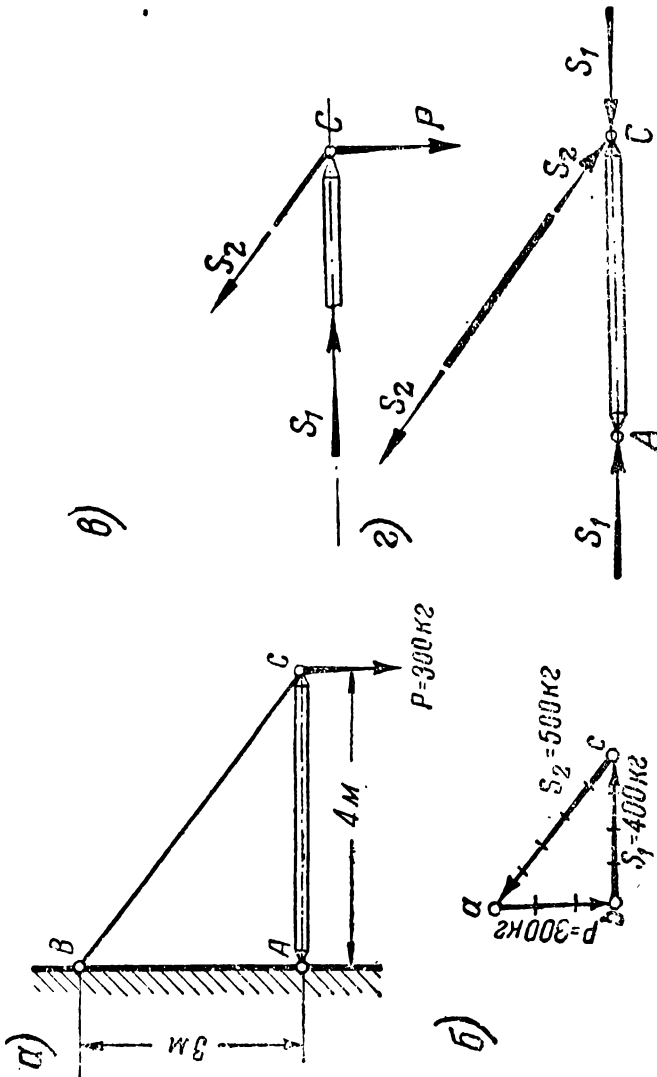


Рис. 27. Определение усилий в брусках кронштейна.

Решение. Разложим силу P на две составляющие по направлениям AB и CB с помощью треугольника сил. Для этой цели проведем из конца и начала ее отрезки, параллельные AB и CB , до их пересечения в точке C (рис. 27,б).

Получаем треугольник abc , в котором сторона bc определяет по величине и направлению усилие S_1 , а сторона ac — усилие S_2 .

$$S_1 = 400 \text{ кг}; S_2 = 500 \text{ кг}.$$

Мысленно вырежем узел C и перенесем на него стрелки с треугольника сил (рис. 27, θ); находим, что брусок AC сжат, а тяга BC растянута. Это изображено схематически на рис. 27, z .

Следовательно если действие стержня на узел представляется на силовом треугольнике направленным к узлу, то стержень сжат, если от узла — растянут.

Пример 5. Разложить силу R на две силы P и Q , величины которых даны (рис. 28, a).

Решение. Задача может быть решена только в том случае, когда $P+Q > R$. Основываясь на этом предположении, вычертим дуги из точек A и B данной силы R , как из центров, радиусами

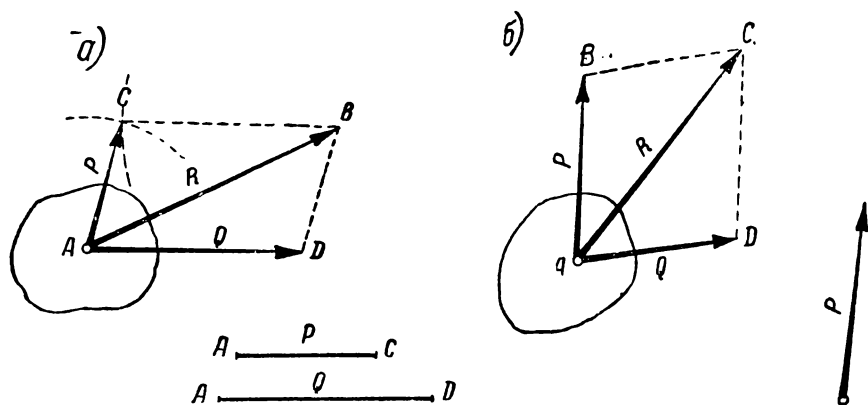


Рис. 28. Разложение силы на две составляющие:

a — величины составляющей даны; b — одна из составляющих дана по величине и направлению.

P и Q . Точку C пересечения двух дуг соединяем с A и B . Полученный треугольник ABC дополняем до параллелограмма $ACBD$, тогда сторона AC представляет силу P , а AD — силу Q .

Пример 6. Разложить силу R на две силы P и Q , из которых сила P дана по величине и направлению (рис. 28, b).

Решение. Соединяем концы B и C данных сил прямой BC и дополняем ABC до параллелограмма $ABCD$. Сторона AD представляет искомую силу Q .

§ 6. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПУЧКА СИЛ

Графическое условие равновесия

Силы, пересекающиеся в одной точке, находятся в равновесии, если их равнодействующая равна нулю ($R=0$), т. е. если силовой многоугольник замкнут.

Это условие называется графическим условием равновесия пучка сил.

Пример 1. Определить равнодействующую трех равных сил, образующих углы в 120° (рис. 29, a).

Решение. Строим силовой треугольник; он замкнут (рис. 29,б). Следовательно $R=0$; силы находятся в равновесии.

Пример 2. Определить усилия в стержнях 2 и 4 узла фермы, если дано, что стержень 1 сжат силой $S_1=9\text{ м}$, а стержень 3 растянут силой $S_3=20\text{ м}$ (рис. 30,а).

Решение. Искомые и данные силы, сходящиеся в узле фермы, должны взаимно уравновеситься, т. е. многоугольник, построенный на этих силах, должен быть замкнут.

Отложим от какой-нибудь точки A одну за другой известные нам силы S_1 и S_3 , а затем из конца силы S_3 и из начала силы S_1 проводим прямые, параллельные неизвестным усилиям S_2 и S_4 (рис. 30,б).

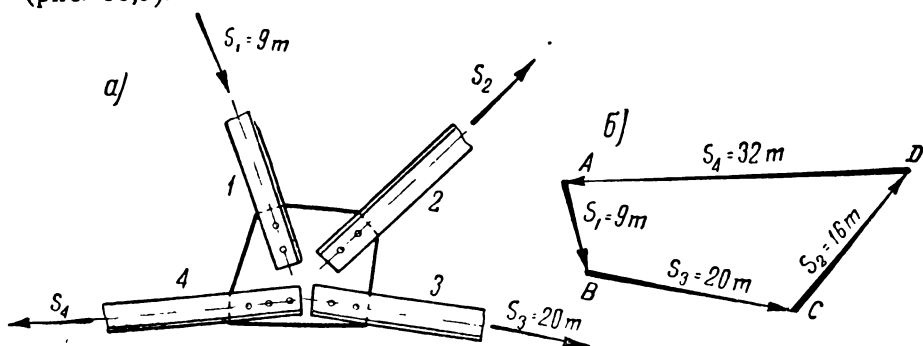


Рис. 30. Определение усилий в стержнях посредством многоугольника сил.

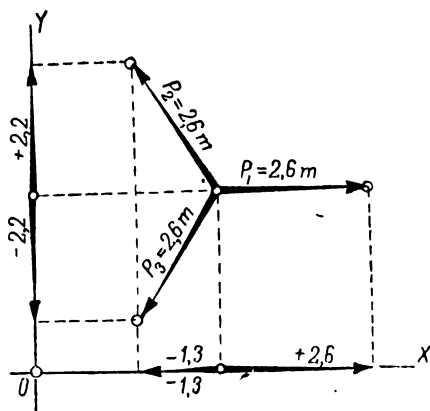
Построенный многоугольник $ABCD$ определяет по величине и направлению искомые неизвестные. Измерив в масштабе сил отрезки CD и DA , находим, что $S_2=16\text{ м}$, а $S_4=32\text{ м}$. Стрелки, поставленные по правилу обвода, указывают на то, что стержни 2 и 4 растянуты.

Аналитические условия равновесия

Возьмем уравновешенный пучок сил, подобный приведенному выше в примере 1. Спроектируем данные силы на оси координат (рис. 31).

Определим по чертежу величины проекций. Затем произведем сложение проекций по каждой оси в отдельности; оказывается,

сумма проекций по каждой оси равна нулю. Это позволяет сформулировать аналитические условия равновесия пучка сил:



$$\begin{aligned}\Sigma X &= -1,3 - 1,3 + 2,6 = 0 \\ \Sigma Y &= -2,2 + 2,2 = 0\end{aligned}$$

Рис. 31. Определение аналитических условий равновесия.

Силы, пересекающиеся в одной точке, находятся в равновесии, если алгебраические суммы проекций сил на оси координат равны нулю.

Условия записываются кратко в виде двух уравнений:

$$\Sigma X = 0 \text{ и } \Sigma Y = 0.$$

Мы проделали графическое определение величин проекций. Между тем условия равновесия называются аналитическими потому, что величины проекций чаще всего определяются вычислением (см. введение, § 4).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Напишите в алгебраической форме условие равновесия сил, направленных по одной прямой.
2. По каким правилам находится равнодействующая двух сил, пересекающихся в одной точке?
3. Сформулируйте правило определения равнодействующей по способу треугольника сил.
4. Сформулируйте правило определения равнодействующей по способу многоугольника сил.
5. Какие данные нужны для разложения силы на две составляющие?
6. В чем заключаются основные приемы разложения сил?
7. Определите графическое условие равновесия пучка сил.
8. Напишите аналитическое условие равновесия пучка сил.

Глава 3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СИЛЫ

§ 1. СЛОЖЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ, НАПРАВЛЕННЫХ В ОДНУ СТОРОНУ

Для того чтобы обосновать правило сложения параллельных сил, проделаем построение, пользуясь результатами, полученными в главе 2.

Пусть даны (рис. 32) параллельные силы P и Q , действующие в одном направлении на точки A и B . Так как эти силы не пересекаются, то их нельзя непосредственно заменить равнодействующей при помощи параллелограмма сил. Чтобы сложить их, проводим прямую AB и прилагаем к телу по направлению этой прямой равные и противоположные силы T и T_1 , действующие на точки A и B . Мы имеем право прибавлять такие силы, потому что они взаимно уравновешиваются.

После этого складываем по правилу параллелограмма силу P с силой T , а силу Q с силой T_1 . Получим равнодействующие f и s .

Направления этих сил продолжаем до пересечения в точке O . Затем переносим точки приложения сил f и s в точку O и разлагаем силы параллельно двум направлениям: прямой AB и заданным силам P и Q .

(Мы как бы передвигаем в точку O построенные в точках A и B параллелограммы.)

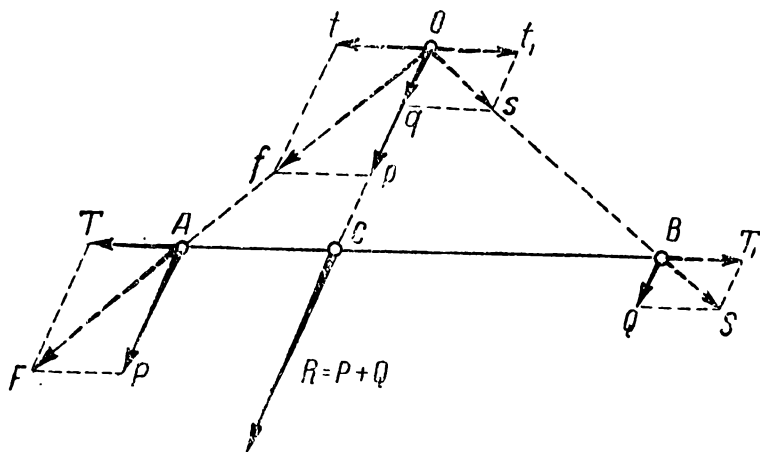


Рис. 32. Сложение двух параллельных сил.

Полученные в результате равные и противоположные силы $t = T$ и $t_1 = T_1$ можно отбросить; у нас останутся силы $p = P$ и $q = Q$, которые действуют по одной прямой OC и дают равнодействующую

$$R = P + Q. \quad (1)$$

Итак, равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, равна их сумме и направлена в ту же сторону. Точку приложения этой равнодействующей можно перенести на прямую AB в точку C .

Определим теперь место точки C .

Из подобия треугольников AOC и fOp следует пропорция:

$$\frac{Op}{fp} = \frac{OC}{AC} \text{ или } \frac{P}{T} = \frac{OC}{AC}.$$

Пишем произведение средних и крайних членов:

$$P \cdot AC = T \cdot OC \quad (a)$$

Далее рассматриваем треугольники Oqs и OCB . Из их подобия следует пропорция:

$$\frac{Oq}{sq} = \frac{OC}{BC} \text{ или } \frac{Q}{T} = \frac{OC}{BC}.$$

Берем произведение средних и крайних членов:

$$Q \cdot CB = T_1 \cdot OC. \quad (b)$$

Так как правые части уравнений (а) и (б) равны между собой, то и левые части равны, следовательно

$$P \cdot AC = Q \cdot BC.$$

Отсюда пропорция:

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC}. \quad (2)$$

Из всего сказанного следует правило:

Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, равняется их сумме; точка приложения равнодействующей делит расстояние между точками приложения слагаемых сил в отношении, обратно пропорциональном этим силам.

Приведем равенство (2) к виду более удобному для решения задач.

Сумма предыдущих членов пропорции относится к сумме последующих, как один из предыдущих относится к своему последующему; напишем на основании этого следующую пропорцию:

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AC+BC},$$

но

$$P+Q=R \text{ и } AC+BC=AB,$$

поэтому

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

Обозначим $CB=b$; $AC=a$; $AB=l$, получим:

$$\frac{P}{b} = \frac{Q}{a} = \frac{R}{l}. \quad (3)$$

Рис. 33. Определение равнодействующей двух параллельных сил.

Пример. Даны две параллельные силы $P=15 \text{ кг}$ и $Q=5 \text{ кг}$, действующие на точки A и B , расположенные на расстоянии 60 см друг от друга (рис. 33). Определить равнодействующую R и точку ее приложения C .

Решение. $R=P+Q=15+5=20 \text{ кг}$.

Точка C определится из равенства $\frac{P}{b} = \frac{R}{l}$:

$$\frac{15}{b} = \frac{20}{60}; \quad b = \frac{15 \cdot 60}{20} = 45 \text{ см}.$$

§ 2. РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СИЛЫ

На основании правила, полученного в § 1, решается задача разложения данной силы на две параллельные силы, направленные в ту же сторону.

Чтобы задача имела определенное решение, необходимы дополнительные данные, например: точки приложения искомым составляющих сил; величина и точка приложения одной из составляющих сил.

Из равенства (3), выведенного в § 1, найдем величину составляющих P и Q .

$$\frac{P}{b} = \frac{R}{l} \text{ или } Pl = bR,$$

отсюда

$$P = \frac{bR}{l},$$

$$\frac{Q}{a} = \frac{R}{l} \text{ или } Ql = aR,$$

отсюда

$$Q = \frac{aR}{l}.$$

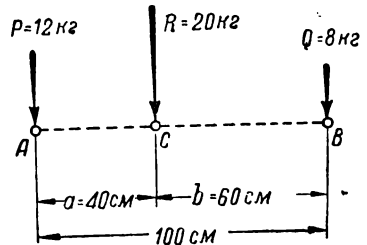
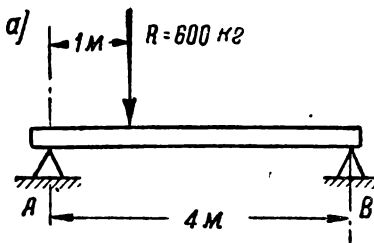


Рис. 34. Разложение силы на две параллельные составляющие.

Пример 1. Разложить силу $R = 20$ кг, приложенную в точке C , на две параллельные силы, приложенные в точках A и B на расстоянии $a = 40$ см и $b = 60$ см от точки C (рис. 34).



Решение.

$$P = \frac{bR}{l} = \frac{60 \cdot 20}{100} = 12 \text{ кг};$$

$$Q = \frac{aR}{l} = \frac{40 \cdot 20}{100} = 8 \text{ кг}.$$

Проверим полученные результаты:

$$R = P + Q = 12 + 8 = 20 \text{ кг}.$$

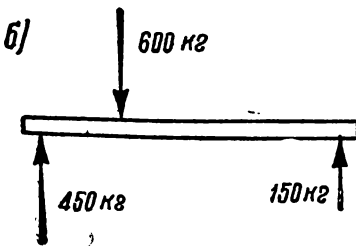


Рис. 35. Определение реакций опор.

Пример 2. Балка длиной 4 м лежит на двух опорах A и B (рис. 35, а). На расстоянии 1 м от левой опоры A на балку действует сила $R = 600$ кг. Определить реакции опор.

Решение. Разложим данную силу на две составляющие:

$$P = \frac{600 \cdot 3}{4} = 450 \text{ кг}; \quad Q = \frac{600 \cdot 1}{4} = 150 \text{ кг}.$$

Таким образом давление на опоре A в три раза больше давления на опоре B . Каждая опора развивает реакцию, равную и противоположно направленную. Реакции опор обычно обозначаются теми же буквами, что и самые опоры. Итак:

$$A = 450 \text{ кг}; \quad B = 150 \text{ кг}.$$

Балка находится в равновесии под действием трех сил: данной силы в 600 кг и двух опорных реакций в 450 и 150 кг (рис. 35, б).

Пример 3. Два подносчика несут на перекладине длиной в 2 м бадью с асфальтом весом в 30 кг. Определить давление (нагрузку), которое приходится на плечо каждого подносчика, если бадья находится на расстоянии 80 см от первого из них.

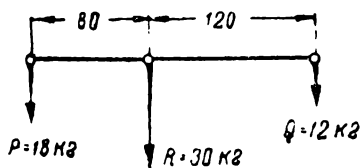


Рис. 36. Распределение нагрузки на две опоры.

Решение. Изображаем схематически условия нашей задачи на рис. 36.

Разложим силу $R = 30$ кг на составляющие P и Q .

$$P = \frac{bR}{l} = \frac{1,2 \cdot 30}{2} = 18 \text{ кг};$$

$$Q = \frac{aR}{l} = \frac{0,8 \cdot 30}{2} = 12 \text{ кг}.$$

Проверка: $R = P + Q = 18 + 12 = 30$ кг; давления найдены правильно.

§ 3. СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ, НАПРАВЛЕННЫХ В РАЗНЫЕ СТОРОНЫ

Пусть даны две параллельные силы P и Q , направленные в разные стороны, причем сила $P > Q$ (рис. 37).

Продолжаем прямую AB в сторону точки приложения силы P и заменяем силу P двумя параллельными силами, действующими вниз. Из них одна сила приложена в точке B и имеет величину $Q_1 = Q$, но направлена противоположно силе Q ; другая сила пусть будет сила R , приложенная в точке C .

Так как силы R и Q , сложенные по правилу параллельных сил, направленных в одну сторону, дают равнодействующую P , то $R + Q = P$, отсюда $R = P - Q$; но $Q_1 = Q$, следовательно $R = P - Q$. Теперь мы имеем три силы R_1 , Q и Q_1 . Но силы Q и Q_1 равные и противоположные взаимно уравновешиваются и могут быть отброшены. Остается только сила R , которая и будет искомой равнодействующей.

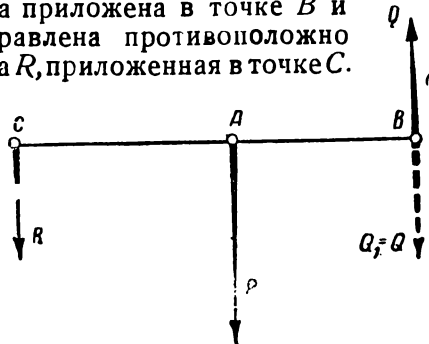


Рис. 37. Сложение двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны.

Итак, равнодействующая двух параллельных сил, направленных в разные стороны, равна разности этих сил и направлена в сторону большей силы.

Что касается точки приложения C , то она определится из той пропорции, которую мы можем написать при разложении силы P на Q_1 и R . Эта пропорция есть:

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q_1}{CA} = \frac{R}{AB}.$$

Заметим, что $Q_1 = Q$; затем обозначим $CB = b$; $CA = a$; $AB = l$.
Получим окончательно:

$$\frac{P}{b} = \frac{Q}{a} = \frac{R}{l}. \quad (3a)$$

Мы видим, что формула (3a) по буквенным обозначениям вполне совпадает с формулой (3), только отрезки CB , AC и AB имеют на рис. 37 иное расположение, чем на рис. 32; именно на рис. 37 точка C лежит между A и B , а на рис. 37 она лежит вне отрезка AB со стороны большей из слагаемых сил. Отсюда вытекает правило:

Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в разные стороны, равна разности этих сил и направлена в сторону большей силы. Точка приложения равнодействующей лежит на линии, соединяющей точки приложения слагаемых сил, со стороны большей силы; причем расстояния ее от точек приложения слагаемых сил обратно пропорциональны этим силам.

§ 4. ПАРА СИЛ

Две силы равные, параллельные и направленные в противоположные стороны, называются парой сил, или короче — парой (рис. 38).

На основании предыдущего правила (§ 3) равнодействующая этих сил должна равняться их разности, т. е. $R = P - Q$, но $P = Q$, следовательно $R = 0$.

Так как равнодействующая пары сил равна нулю, значит, нельзя заменить пару сил одной силой. Вместе с тем силы, составляющие пару, не находятся в равновесии (по второй аксиоме); под действием пары тело вращается. Таким образом пара сил

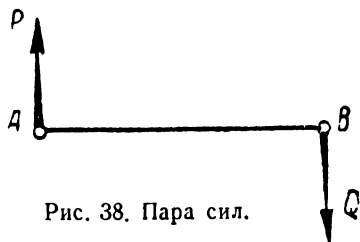


Рис. 38. Пара сил.

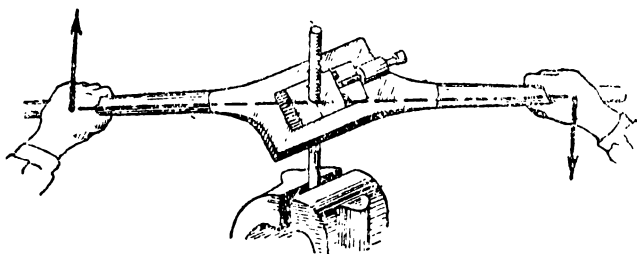


Рис. 39. Работа клуппом (пример пары сил).

представляет собой совокупность сил, не находящихся в равновесии и не имеющих равнодействующей. Один из многочисленных случаев действия пары сил показан на рис. 39.

Две точки приложения сил A и B обыкновенно выбирают так, чтобы соединяющая их прямая AB была перпендикулярна к направлению сил.

Длину перпендикуляра AB называют плечом пары. Для краткости пару обыкновенно обозначают символом (P, P) .

§ 5. СЛОЖЕНИЕ МНОГИХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Допустим, что нам даны три параллельные силы P , Q и F (рис. 40), приложенные в точках A , B и C . Чтобы сложить эти силы, соединяем сначала точки приложения A и B и заменяем силы P и Q равнодействующей $R_1 = P + Q$, приложенной в точке D . При этом положение точки D определяется пропорцией:

$$\frac{P}{DB} = \frac{P+Q}{AB},$$

откуда

$$DB = \frac{P \cdot AB}{P+Q}.$$

После этого соединяем точку D с точкой C и складываем силы R_1 и F . Получаем равнодействующую $R = P + Q + F$, которая будет приложена в точке O , определяемой из пропорции:

$$\frac{F}{DO} = \frac{P+Q+F}{DC}.$$

Из этой пропорции следует, что

$$DO = \frac{F \cdot DC}{P+Q+F}.$$

Рис. 40. Сложение нескольких параллельных сил.

Таким образом мы нашли равнодействующую $R = P + Q + F$ и определили ее точку приложения O . При этом важно заметить, что место точки приложения O не зависит от направления параллельных сил. Мы можем всем параллельным силам дать другое направление, тогда и равнодействующая R примет такое же направление, но место точки приложения O останется прежним.

Из сказанного вытекает правило:

Равнодействующая многих параллельных сил равна их сумме и проходит через точку приложения, положение которой не изменяется с изменением направления параллельных сил. Упомянутая точка приложения называется центром параллельных сил.

Условия равновесия параллельных сил будут установлены в главе 4.

§ 6. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Центром тяжести тела называется точка приложения равнодействующей всех сил притяжения земли, действующих на частицы тела.

Эти силы направляются по прямым линиям к центру земного шара (рис. 41). При размерах тела, весьма малых сравнительно с размерами земли, все эти отвесные линии можно считать параллельными, поэтому центр тяжести определяется по правилам отыскания центра параллельных сил.

Приводим высказывание Галилея о параллельности отвесных линий.

„Авторитет одного Архимеда должен успокоить в этом отношении кого угодно. В своей механике он принимает как правильный принцип, что коромысло весов является прямой линией, равноудаленной во всех своих точках от общего центра всех тяжелых тел, и что нити, к которым подвешены тяжелые тела, параллельны между собой. Подобные допущения всегда принимались, ибо на практике инструменты и величины, с которыми мы имеем дело, столь ничтожны по сравнению с огромным расстоянием, отделяющим нас от центра земного шара, что мы сможем принять $\frac{1}{60}$ часть градуса соответствующей весьма большой окружности за прямую линию, а два перпендикуляра, опущенные из ее концов, за параллельные линии. Если бы в наших практических делах нам

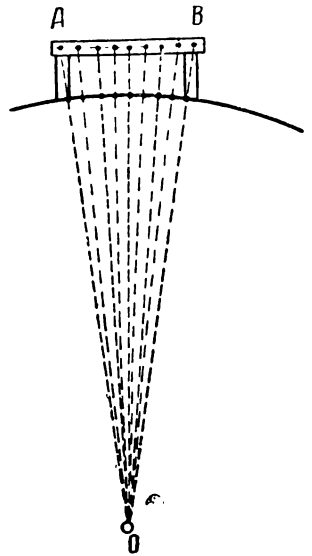


Рис. 41. Направление сил тяжести.

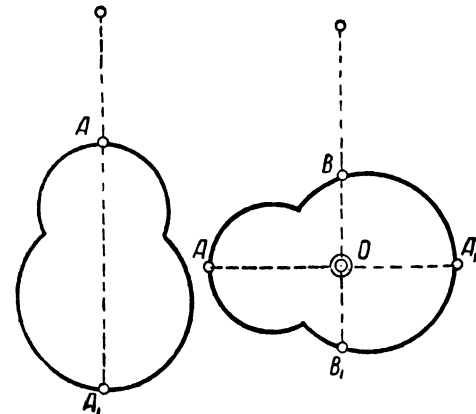


Рис. 42. Отыскание центра тяжести пластинки.

следовало считать за подобными ничтожными величинами, то нам прежде всего пришлось бы осудить архитекторов, которые берутся воздвигать при помощи отвеса высокие башни с параллельными стенами“. („Беседы о двух новых науках“).

Действительно, в пределах одного здания невозможно обнаружить непараллельность отвесных линий.

Для отыскания центра тяжести употребляется следующий практический прием, который особенно удобен, когда тело имеет форму тонкой пластинки. Тело вешается на нить, привязанную в точке A , причем направление нити AA_1 отмечается на теле (рис. 42). Потом тело вешается на нить, укрепленную в точке B , и отмечается новое направление нити BB_1 .

Искомый центр тяжести тела, подвешенного на нити, всегда становится в точку, лежащую на направлении нити. Мы убе-

ждаемся, что в первом случае центр тяжести лежит на прямой AA_1 , а во втором случае — на прямой BB_1 , т. е. он расположен в точке O пересечения этих прямых.

§ 7. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

Симметричным называется тело, имеющее центр симметрии, т. е. такую точку, относительно которой все точки тела расположены попарно. Парные точки имеют равные веса; прямые, соединяющие эти точки, проходят через упомянутый центр и делятся им пополам.

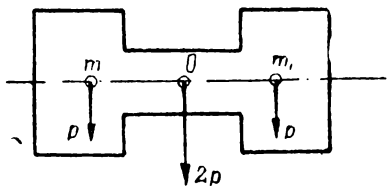


Рис. 45. Центр тяжести симметричного тела.

Если тело имеет центр симметрии, то в этом центре лежит центр тяжести тела.

Пусть изображенное на рис. 43 тело имеет центр симметрии O . Всякой точке m этого тела соответствует парная точка m_1 , равная m по весу и расположенная так, что прямая mm_1 делится точкой O пополам. Слагая веса p и p_1 точек m и m_1 , получим равнодействующую $2p$, которая пройдет через O . Так как через O пройдут все такие равнодействующие, то и вся сила веса тела будет приложена в O , т. е. O будет центром тяжести.

Это свойство симметричного тела имеет множество применений (рис. 44). Мы выводим заключение отсюда, что:

- а) центр тяжести тонкого однородного прямого стержня лежит по середине его (рис. 44, а);
- б) центр тяжести тонкой однородной пластинки, имеющей форму параллелограмма, лежит на пересечении его диагоналей (рис. 44, б);
- в) то же — в однородном параллелепипеде (рис. 44, в);

г) у тонких однородных пластинок, имеющих форму правильного многоугольника (с четным числом сторон) и круга, центр тяжести совпадает с геометрическим центром фигуры;

д) то же в однородном шаре;

е) центр тяжести прямого круглого цилиндра лежит на середине оси и т. д.

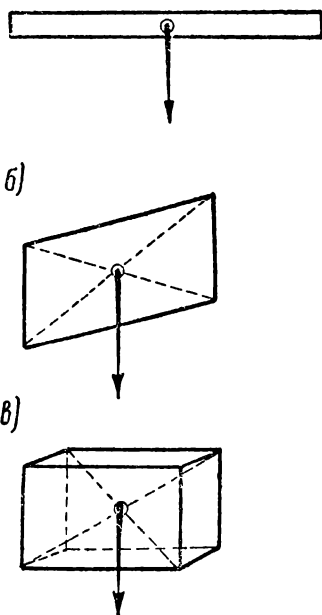


Рис. 44. Центр тяжести различных симметричных тел.

§ 8. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

Центр тяжести несимметричного тела может быть определен с помощью теоретических соображений. Рассмотрим два простейших случая.

Несимметричная треугольная пластинка

Разбиваем треугольную пластинку ABC на тонкие полоски mn сечениями, параллельными стороне BC (рис. 45). Каждая полоска будет иметь центр тяжести в своей середине, так что сила тяжести полоски P будет приложена в точке e , лежащей на середине прямой Aa ; все такие точки e для разных полосок будут расположены на прямой Aa , соединяющей вершину A с точкой a , серединой стороны BC . Складывая все силы p , найдем, что центр этих параллельных сил лежит на прямой Aa . Таким же образом убедимся, что центр тяжести должен лежать на прямой Bb (для этого пришлось бы разбивать треугольник на полоски, параллельные AC).

Так как центр тяжести должен находиться на прямой Aa и Bb , то он будет лежать в точке O на прямой Aa . Для этого соединим точки a и b и рассмотрим подобие треугольников ABO и abo , потому что $ab \parallel AB$.

Из этого подобия следует пропорция:

$$\frac{aO}{AO} = \frac{ab}{AB};$$

но

$$\frac{ab}{AB} = \frac{aC}{CR} = \frac{1}{2};$$

следовательно $\frac{aO}{AO} = \frac{1}{2}$.

Отсюда получаем $AO = 2aO$; прибавим к обеим частям этого равенства по aO :

$$AO + aO = 2aO + aO; \quad Aa = 3aO.$$

Следовательно $aO = \frac{1}{3} Aa$.

Центр тяжести треугольной пластинки расположен на прямой, соединяющей вершину треугольника с серединой основания, и отстоит от основания на $\frac{1}{3}$ этой прямой.

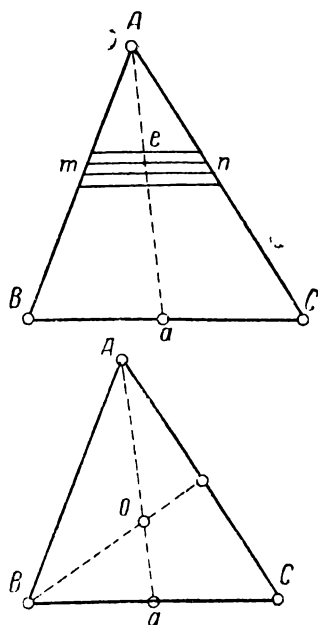


Рис. 45. Центр тяжести несимметричной треугольной пластинки.

Несимметричная четырехугольная пластинка

Разобьем четырехугольную пластинку $ABCD$ диагональю AC на две треугольные пластинки ABC и ADC (рис. 46). Найдем центры тяжести O_1 и O_2

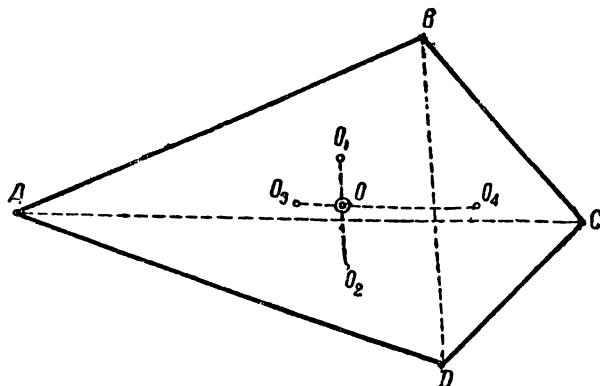


Рис. 46. Центр тяжести несимметричной четырехугольной пластинки.

этих двух пластинок по правилу, изложенному выше. Сложив силы веса треугольников, приложенные в точках O_1 и O_2 , получим равнодействующую силу, точка приложения которой должна лежать на прямой O_1O_2 . Затем разбиваем нашу пластинку диагональю BD на два треугольника ABD и BCD и отыскиваем их центры тяжести O_3 и O_4 . Рассуждая, как в предыдущем случае, приходим к заключению, что центр тяжести должен лежать и на прямой O_3O_4 . Следовательно центр тяжести находится в точке O пересечения прямых O_1O_2 и O_3O_4 .

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чему равна равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону?
2. На какие части делит точка приложения равнодействующей расстояние между составляющими?
3. Какие данные нужны для разложения силы на две параллельные составляющие?
4. Возможно ли сложение двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны?
5. Что такое пара сил?
6. Опишите порядок сложения многих параллельных сил.
7. Что называется центром параллельных сил?
8. Дайте определение центра тяжести тела.
9. Где располагается центр тяжести симметричного тела?
10. Где располагается центр тяжести правильного шестиугольника?

Глава 4. СИЛЫ, ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫЕ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. МОМЕНТ СИЛЫ

Рассмотрим процесс подъема груза D посредством лома AB (рис. 47).

Опыт показывает, что чем дальше рука удалена от точки опоры, тем легче поднять груз D . Следовательно имеют значение величина силы и расстояние точки приложения силы от опоры.

Совокупность этих двух факторов называется моментом силы.

В общем случае, моментом силы относительно точки называется произведение величины силы на длину перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.

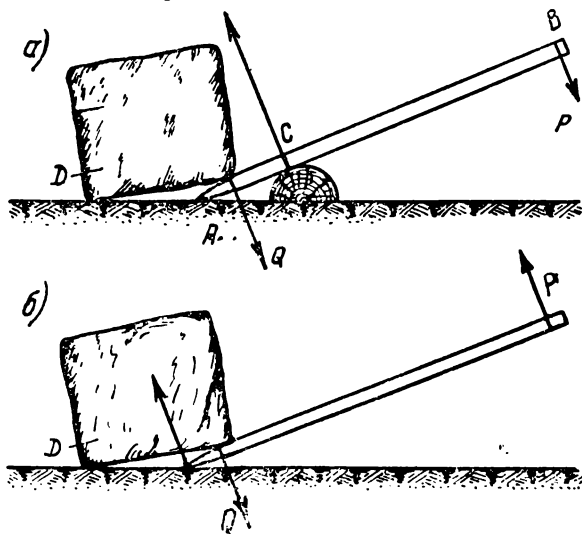


Рис. 47. Применение рычага:

а — рычаг первого рода; б — рычаг второго рода.

Точка, из которой опущен перпендикуляр, называется центром моментов; перпендикуляр носит название плеча силы.

Если например даны сила P (рис. 48) и центр моментов O , то следует опустить из точки O перпендикуляр d на направление силы P и взять произведение $P \cdot d$.

Будем обозначать момент силы P через M_p , так что $M_p = P \cdot d$.

Моменты сил различаются не только по величине, но и по направлению. Момент силы условно считается положительным, если сила стремится вращать тело по ходу часовой стрелки, и отрицательным, если сила стремится вращать тело в обратную сторону. На рис. 48 сила P вызывает положительный момент $M_p = +Pd$, сила Q — отрицательный момент, $M_q = -Q \cdot d$.

Отметим некоторые свойства моментов сил.

Момент силы не изменяется, когда мы переносим силу по ее направлению, не изменяя ее величины, так как при этом не изменяется длина перпендикуляра, опущенного из центра моментов на направление силы.

Момент силы равняется нулю, когда $P \cdot d = 0$. В этом случае или сила P равна нулю, или ее направление проходит через центр моментов, т. е. $d = 0$.

Длина перпендикуляра (плеча) измеряется в сантиметрах или метрах, а величина силы — в килограммах или тоннах. Следовательно величина момента измеряется в килограммосантиметрах или килограммометрах и т. д. и обозначается: *кгсм* или *кгм*, *тсм* или *тм*.

Построим треугольник DOC (рис. 48), в котором вершиной является точка O (центр моментов), а основанием отрезок CD (сила Q).

Высота этого треугольника измеряется перпендикуляром d (плечом силы Q). Площадь треугольника DOC определится как половина произведения основания на высоту (т. е. $\frac{Qd}{2}$).

Величина момента силы Q равна Qd , значит, она в два раза больше величины площади треугольника DOC .

$$M_q = 2 \text{ пл. } \triangle DOC.$$

Аналогичное построение нетрудно осуществить для силы P , вообще для любой силы.

Следовательно величину момента силы можно вычислить как двойную площадь треугольника, вершиной которого является данная точка, а основанием — данная сила.

Понятие о моменте силы установил Галилей.

Он широко применял метод „моментов“ при решении задач из области статики, динамики и сопротивления материалов.

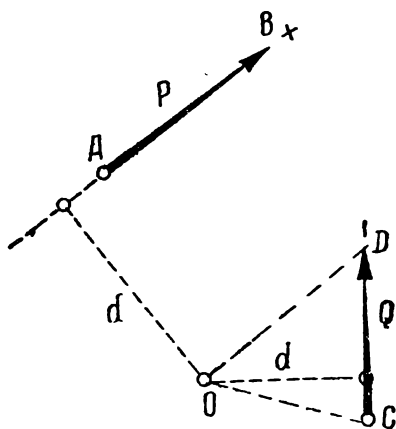


Рис. 48. Момент силы.

Рычаг находится в равновесии, если алгебраическая сумма моментов сил, действующих на него относительно точки опоры, равняется нулю.

Это условие обычно записывается сокращенно в виде равенства:

$$\Sigma M = 0.$$

Рассмотрим рычаг с грузами $P = 2 \text{ кг}$ и $Q = 10 \text{ кг}$ (рис. 51). Определим момент сил P и Q относительно точки O .

$$M_P = - 2 \text{ кг} \cdot 100 \text{ см} = - 200 \text{ кгсм};$$

$$M_Q = - 10 \text{ кг} \cdot 20 \text{ см} = 200 \text{ кгсм};$$

$$\Sigma M = - 200 + 200 = 0.$$

Действия моментов сил P и Q равны и противоположны и следовательно взаимно уравновешиваются.

Вообще говоря, рычаг находится в равновесии под действием трех сил: нагрузок P , Q и реакции опоры R_1 . Для выяснения этого обстоятельства заменим силы P и Q равнодействующей силой R и определим ее момент.

На основании § 2 имеем:

$$M_R = M_P + M_Q = - 200 + 200 = 0.$$

Согласно § 1 равенство нулю момента равнодействующей R означает, что плечо равнодействующей R равно нулю, т. е. она приложена непосредственно на опоре рычага. Сила R вызывает равное и противоположно направленное противодействие опоры R_1 , вследствие чего силы уравновешиваются.

К этому выводу мы можем прийти в данном частном случае, пользуясь методом сложения параллельных сил (гл. 3, § 1).

Равнодействующая R двух параллельных сил P и Q равна их сумме; точка ее приложения делит расстояние b между точками приложения a и b слагаемых сил в отношении, обратно пропорциональном этим силам.

$$R = P + Q; \quad \frac{P}{b} = \frac{Q}{a} = \frac{R}{l}.$$

Подставляем данные, относящиеся к рычагу;

$$R = P + Q = 2 + 10 = 12 \text{ кг}.$$

$$\frac{P}{b} = \frac{R}{l} \text{ или } \frac{2}{b} = \frac{12}{120};$$

Отсюда

$$b = \frac{2 \cdot 120}{12} = 20 \text{ см}.$$

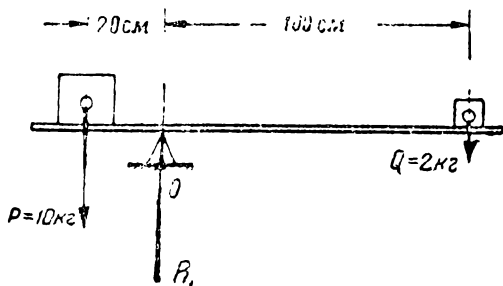


Рис. 51. Равновесие рычага.

Значит, равнодействующая R двух параллельных сил (грузов) P и Q приложена непосредственно на опоре рычага и уравновешивается ее реакцией R_1 .

Следовательно нагруженный рычаг находится в равновесии, если расстояния грузов от точки опоры рычага обратно пропорциональны их весам.

Если силы, действующие на тело, не параллельны, то последнее правило неприменимо.

Правило же моментов является общим для всех случаев действия сил.

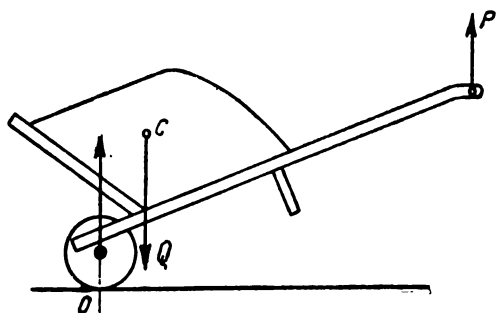


Рис. 52. Тачка — рычаг второго рода.

Условие равновесия рычага, нагруженного параллельными силами, установлено Архимедом.

Обобщающее определение условий равновесия рычага дал Галилей, использовавший свой метод моментов.

Рычаг, рассмотренный выше, называется рычагом первого рода; его отличительный признак: точка опоры лежит между двумя данными силами. Рычаг, у которого обе данные силы приходятся с одной стороны от точки опоры, называется рычагом второго рода.

Тачка — рычаг второго рода (рис. 52). Лом или вага могут применяться как рычаги первого или второго рода (рис. 47).

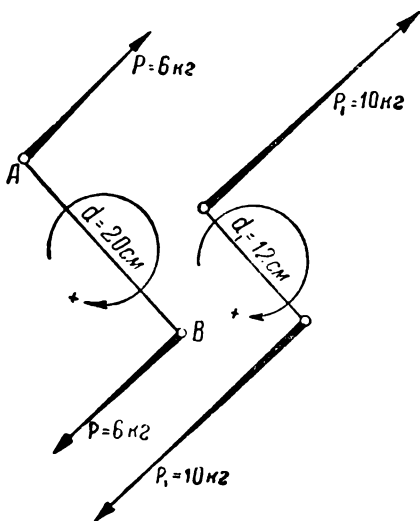


Рис. 53. Момент пары.

§ 4. МОМЕНТ ПАРЫ

Моментом пары сил относительно какой-нибудь точки ее плоскости называется произведение одной из сил, составляющих пару, на плечо пары.

На рис. 53 момент M пары (P, P) выражается через $P \cdot d$, где $d = AB$ есть плечо пары.

Момент пары называют положительным, если пара стремится вращаться по ходу часовой стрелки; если вращение происходит в обратном направлении, — момент отрицательный.

§ 5. СЛОЖЕНИЕ ПАР

Действие пары определяется величиной ее момента. Мы можем уменьшить или увеличить плечо пары и соответственно изменить величину сил, лишь бы не изменился момент пары.

Например можно пару (P, P) заменить парой (P_1, P_1) , потому что моменты их одинаковы (рис. 53).

Имеем: для пары (P, P) момент $= 6 \text{ кг} \times 20 \text{ см} = 120 \text{ кгсм}$ и для пары (P_1, P_1) момент $= 10 \text{ кг} \times 12 \text{ см} = 120 \text{ кгсм}$.

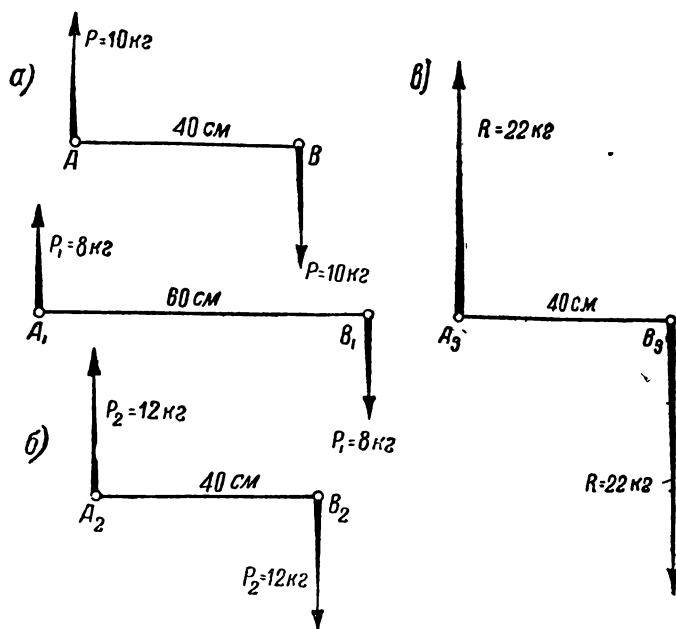


Рис. 54. Сложение пар.

Пусть даны две пары (P, P) и (P_1, P_1) (рис. 54, а). Берем плечо одной из пар, например (P, P) , имеющее длину 40 см. Сравним с ним плечо другой пары (P_1, P_1) , тогда величина измененной силы определится из пропорции

$$40 : 60 = 8 : x; \quad x = 12 \text{ кг}.$$

Мы получим две пары:

а) пара (P, P) имеет плечо 40 см и силы по 10 кг; ее момент $M_{(P, P)} = 40 \cdot 10 = 400 \text{ кгсм}$;

б) пара (P_2, P_2) имеет также плечо 40 см и силы по 12 кг; ее момент $M_{(P_2, P_2)} = 480 \text{ кгсм}$ (рис. 54, б).

Сумма моментов пар $= 400 + 480 = 880 \text{ кгсм}$.

Сложим силы, действующие на точку A_3 ; получаем равнодействующую $R = P + P_1 = 12 + 10 = 22 \text{ кг}$. Сложим силы, действующие на точку B_3 ; точно так же получим $R = P + P_1 = 12 +$

$+10 = 22$ кг. Мы получили пару (R, R) , которая и будет равнодействующей парой (рис. 54, б). Определим ее момент:

$$R \cdot d = 22 \cdot 40 = 880 \text{ кгсм.}$$

Он равен сумме моментов данных пар.

Все сказанное действительно для сложения любого числа пар.

Отсюда вывод:

Несколько пар можно сложить, т. е. заменить одной равнодействующей парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов этих пар.

Таким образом при сложении пар достаточно сложить моменты пар.

Пример. Даны пары (P, P) ; (P_1, P_1) ; (P_2, P_2) (рис. 55).

Определить равнодействующую пару (R, R) .

Решение. Находим моменты данных пар: $M_{P, P} = -12 \cdot 1 = -12 \text{ кгсм}$;

$$M_{1(P, P_1)} = -20 \cdot 1,5 = -30 \text{ кгсм};$$

$$M_{2(P_2, P_2)} = 30 \cdot 2 = 60 \text{ кгсм.}$$

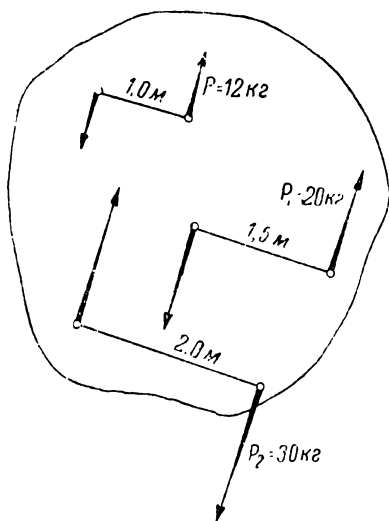


Рис. 55. Определение равнодействующей пары.

Принимая во внимание, что знаки моментов двух пар отрицательные, пишем:

$$M_{R, R} = -12 - 30 + 60 = 18 \text{ кгсм.}$$

Пару (R, R) можно представить себе полученной различным образом: можно взять плечо равным 3 м, а силу 6 кг, или плечо 1,5 м, а силу 12 кг и т. д.

§ 6. УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ ПАР

Снова рассмотрим нагруженный рычаг, находящийся в равновесии (рис. 51). Действующие на него силы можно представить в виде двух пар (P, P) и (P_1, P_1) (рис. 56) при этом

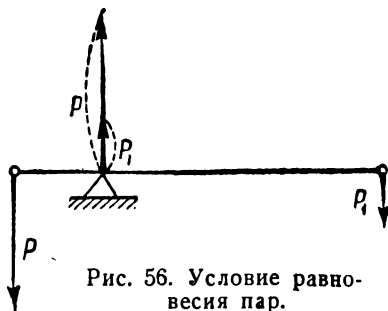


Рис. 56. Условие равновесия пар.

$$\begin{aligned} \text{момент пары } (P, P) &= 2 \cdot 100 = 200 \text{ кгсм} \\ \text{. . . } (P_1, P_1) &= -10 \cdot 20 = -200 \end{aligned}$$

Сумма моментов пар равна нулю ($200 - 200 = 0$). Вообще пары взаимно уравновешиваются, если алгебраическая сумма их моментов равна нулю, или, что одно

и то же, если момент равнодействующей пары равен нулю.

$$\Sigma M = 0.$$

Это есть единственное условие равновесия пар.

§ 7. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ И ПАРЕ

Мы знаем, что силу, действующую на тело, можно перенести по ее направлению, не нарушая равновесия тела.

Покажем, что кроме того силу можно переносить параллельно самой себе в любую точку, присоединяя некоторую пару. Допустим, дана сила P , приложенная в точке A (рис. 57). Возьмем произвольную точку O и приложим к ней две взаимно

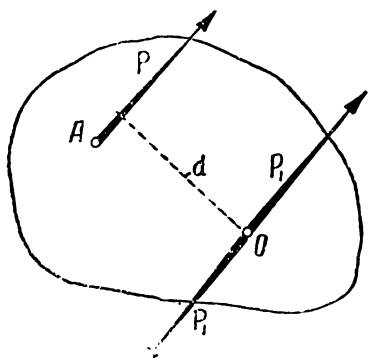


Рис. 57. Перенесение силы (параллельно) с присоединением пары.

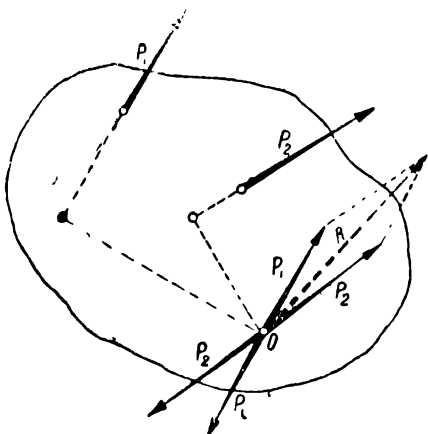


Рис. 58. Перенесение двух сил в заданную точку.

уравновешенные силы P_1 и P_1 , равные силе P , ей параллельные и направленные одна в ту же сторону, что сила P , другая — в сторону противоположную. Таким образом мы перенесем силу P в точку O с помощью присоединения пары сил.

Перенесение не должно изменять действия данной силы на тело. Проверим это. Опустим перпендикуляр из точки O на линию действия данной силы P , получим плечо пары d ; момент пары $M = P_1 \cdot d$; но произведение $P_1 \cdot d$ равно моменту данной силы $P \cdot d$, приложенной в точке A относительно точки O .

Значит

$$M_P = M_{(P_1, P_1)}.$$

Возьмем теперь две силы P_1 и P_2 , расположенные произвольно, и приведем их к равнодействующей силе R , приложенной в точке O (рис. 58).

Прежде всего перенесем все силы в точку O по способу, указанному выше. В результате получим те же две силы P_1 и P_2 , проведенные в точке O параллельно заданным силам P_1 и P_2 , и две пары (P_1, P_1) и (P_2, P_2) .

Складывая перенесенные силы по правилу параллелограмма, получим равнодействующую R . Складывая пары, получим равно-

действующую пару. Момент каждой пары в отдельности равен моменту силы, значит, момент равнодействующей пары равен сумме моментов сил.

Сказанное справедливо для любых сил, действующих на плоскости.

Следовательно силы, произвольно расположенные на плоскости, могут быть приведены к равнодействующей силе, приложенной к заданной точке O , и к паре, момент которой равен сумме моментов данных сил.

§ 8. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СВОБОДНОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

В предыдущем параграфе выяснена возможность перенесения всех данных сил в одну точку с присоединением соответствующих пар.

Для такого сочетания сил объединяются условия равновесия пучка сил и пар. Мы знаем (гл. 1, § 8), что условие равновесия пучка сил можно выразить в виде двух уравнений:

Сумма проекций всех сил на ось X должна быть равна нулю:

$$\Sigma X = 0, \quad (I)$$

т. е. тело не должно двигаться вдоль оси X .

Сумма проекций всех сил на ось Y должна быть равна нулю:

$$\Sigma Y = 0, \quad (II)$$

т. е. тело не должно двигаться вдоль оси Y .

Единственное условие равновесия пар (§ 6) $\Sigma M = 0$, т. е. сумма их моментов должна равняться нулю. Но в § 7 установлено, что моменты присоединенных пар равны моменту данных сил.

Отсюда получается третье условие равновесия:

Сумма моментов данных сил должна быть равна нулю:

$$\Sigma M = 0, \quad (III)$$

т. е. тело не должно вращаться.

Таковы уравнения равновесия сил, расположенных как угодно на плоскости. Эти уравнения являются основными в статике.

§ 9. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ НЕСВОБОДНОГО ТЕЛА

Элементы сооружений, например балки, расположенные на опорах, стеснены в перемещении сопротивлением опор.

Чтобы исследовать равновесие такой балки, рассматривают ее как свободное тело с присоединением сил сопротивления опор.

Иначе говоря, удаляют мысленно опоры и учитывают их действие на тело в виде сил (рис. 59).

Таким образом получают возможность применить к балке уравнения равновесия свободного тела.

Так как нагрузки всегда известны (заданы), то из уравнений равновесия определяются неизвестные величины — силы сопротивления (реакции) опор.

Пример. Определить опорные реакции балки AB , нагруженной силами $P_1 = 500$ кг и $P_2 = 800$ кг (рис. 60).

Решение. Составим уравнения равновесия.

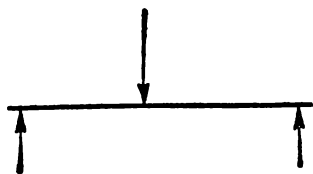
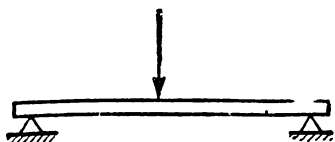


Рис. 59. Силы, приложенные к балке.

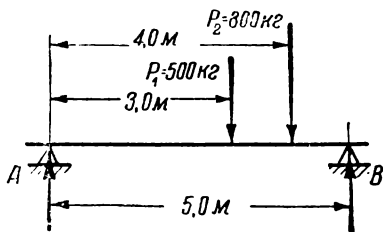


Рис. 60. Определение опорных реакций балки, нагруженной силами P_1 и P_2 .

Определим сумму моментов действующих сил относительно опоры A :

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0, \\ 500 \cdot 3 + 800 \cdot 4 - B \cdot 5 &= 0, \end{aligned}$$

откуда реакция опоры

$$B = \frac{500 \cdot 3 + 800 \cdot 4}{5} = 940 \text{ кг.}$$

Определим сумму моментов действующих сил относительно опоры B :

$$\begin{aligned} \Sigma M_B &= 0, \\ -800 \cdot 1 - 500 \cdot 2 + A \cdot 5 &= 0. \end{aligned}$$

Откуда реакция опоры

$$A = \frac{800 \cdot 1 + 500 \cdot 2}{5} = 360 \text{ кг.}$$

Проекция сил на ось X равны нулю.

Возьмем сумму проекций сил на ось Y :

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= 0, \\ 360 - 500 - 800 + 940 &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что последнее равенство служит здесь для проверки. В него входят заданные величины сил и величины реакций опор, определенные из уравнений моментов.

Таким образом для определения опорных реакций балки, нагруженной только вертикальными нагрузками, достаточно двух уравнений моментов относительно опор.

Если бы на балку действовали не две нагрузки, а большее их число, то выражения для A и B отличались бы от выведенных только тем, что в числителе формул появились бы новые члены, выражающие произведение сил на их расстояние от соответствующей опоры. В общем случае какого угодно числа сил формулы эти принимают вид:

$$A = \frac{\sum P b_i}{l}; \quad B = \frac{\sum P a_i}{l}.$$

Следовательно опорная реакция балки на двух опорах равна алгебраической сумме моментов всех сил относительно другой опоры, деленной на пролет балки.

В примере мы рассмотрели систему параллельных сил как частный случай произвольно расположенных сил.

Для равновесия такой системы достаточно удовлетворить двум условиям, а именно двум уравнениям моментов или одному уравнению проекций и одному уравнению моментов; другое уравнение проекций на ось, перпендикулярную к линиям действия сил, обращается в тождество.

Поэтому аналитические условия равновесия системы параллельных сил можно написать следующим образом:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0$$

или

$$\sum Y = 0; \quad \sum M = 0.$$

Для определения реакции опоры, как и всякой силы, необходимо, вообще говоря, знать три ее элемента: величину, направление и точку приложения.

Эти неизвестные элементы зависят не только от величины и направления нагрузок, но и от устройства опор. Рассмотрим три типа опор, а именно: опоры шарнирно-неподвижную, шарнирно-подвижную и жесткую заделку.

Шарнирно-неподвижная опора препятствует любому поступательному движению балки, но дает ей возможность свободно поворачиваться вокруг шарнира (рис. 61, а, левая опора).

Шарниром называют такое соединение стержней, которое позволяет им вращаться вокруг оси соединения, но не допускает смещения с этой оси (рис. 61, а).

Центр шарнира определяет точку приложения опорной реакции, величина же и направление ее остаются неизвестными.

Неподвижная опора может быть схематически изображена двумя стержнями, соединенными в одном шарнире, который определяет собой точку приложения реакции (рис. 61, б, левая опора). Наличие двух стержней указывает на два неизвестных. Иногда такая опора изображается треугольником, вершина которого определяет собой точку приложения реакции (рис. 61, в, левая опора). Будем применять последнее изображение.

Шарнирно-подвижная опора отличается от предыдущей тем, что опорная плоскость ее поставлена на катки (рис. 61, а, правая опора). Такая опора не препятствует перемещению балки по линии качения, и опорная реакция подвижной опоры всегда будет направлена к плоскости качения.

Следовательно реакция шарнирно-подвижной опоры неизвестна только по величине. Схематически такая опора может быть изображена в виде одного стержня с шарнирами по концам (рис. 61, б, правая опора). В этой схеме точка приложения определяется шарниром, направление реакции — направлением стержня.

Наличие одного стержня указывает на одно неизвестное.

Иногда подвижная опора изображается треугольником, поставленным на катки. Будем применять последнее изображение (рис. 61, в, правая опора).

Практическое осуществление опоры во многих случаях не вполне соответствует вышеуказанным требованиям.

На рис. 62 (левая опора) показана деталь опирания стальной балки на кирпичную стену. Здесь закрепление осуществляется при помощи накладок и болта, который представляет собой шарнир. Балка может в достаточной мере поворачиваться вокруг шарнира, но лишена возможности передвигаться поступательно. Эту конструкцию можно рассматривать как шарнирно-неподвижную опору.

На рис. 62 (правая опора) показана деталь опирания другого конца той же балки на стену. Конец балки уложен на подкладку и не скрепляется со стеной.

В этом опирании нет явно выраженной шарнирной опоры, допускающей свободное вращение элемента вокруг какого-либо центра. Все же опорное сечение может поворачиваться, и кроме того балка может перемещаться в горизонтальном направлении. Эту опору можно рассматривать как шарнирно-подвижную.

Нахождение реакций опор шарнирно-неподвижной и шарнирно-подвижной представляет собой статически определимую задачу.

Статически определенными называются задачи, которые могут быть решены посредством одних уравнений статики. При помощи нескольких уравнений мы

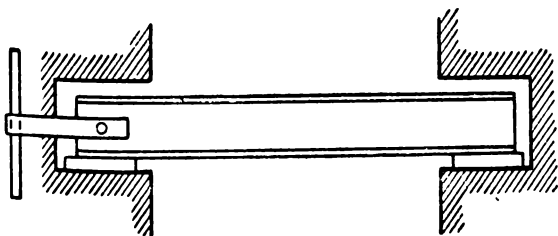


Рис. 62. Практическое осуществление опор балки на двух опорах.

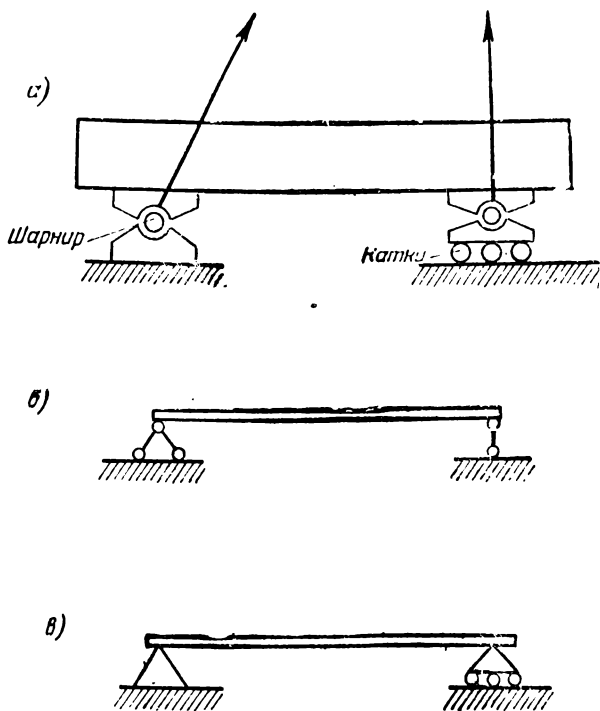


Рис. 61. Изображение опор балки:

а, б, в — слева — шарнирно-неподвижные опоры,
а, б, в — справа — шарнирно-подвижные опоры.

можем найти столько неизвестных (искомых) величин, сколько имеется уравнений. Статика доставляет нам три уравнения равновесия. Следовательно задача будет статически определенной, если число неизвестных в ней равно 3.

• Реакция шарнирно-неподвижной опоры неизвестна по величине и направлению; реакция подвижной опоры неизвестна только по величине.

Таким образом нам необходимо найти три неизвестных, что выполнено посредством трех уравнений статики. Сосчитав число неизвестных в данной задаче и сравнив это число с числом уравнений статики, можно узнать, имеем ли мы дело с задачей статически определенной или неопределимой. Система

сил, приложенных к балке на двух неподвижных опорах, является однажды статически-неопределимой, так как число неизвестных (4) на единицу превышает число уравнений статики (3).

Наряду с описанными типами опор существует жесткое закрепление, при котором устраняется возможность поворота опорного сечения.

Примером такого закрепления может служить заделка стальной консоли в стену (рис. 63). Схематическое изображение жесткого закрепления или заделки показано на рис. 63,б.

Заделка может быть осуществлена следующим образом. Конiec балки заводится в гнездо кладки и опирается внизу в точке *A* на опорную плиту. Вверху конец балки опирается в точке *B* на другую плиту (рис. 63,а). В опорных точках возникают две равные по величине и противоположные по направлению силы *Q*, которые составляют пару с плечом *d*. Момент этой пары называется моментом заделки; он препятствует балке поворачиваться в гнезде. Кроме того балка не должна перемещаться ни в горизонтальном ни в вертикальном направлении. Следовательно в заделке возникают также вертикальная и горизонтальная реакции. Все они определяются посредством трех уравнений статики.

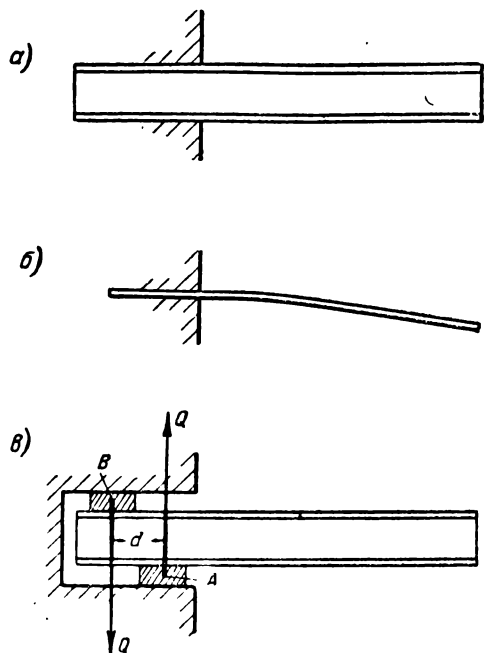


Рис. 63. Изображение и осуществление опор балки, заделанной одним концом.

Пример. Балка длиной 6,0 м нагружена двумя силами. Из них сила $P_1 = 2\text{ т}$ направлена вертикально вниз и приложена на расстоянии 2,0 м от левой опоры; сила $P_2 = 5\text{ т}$ приложена на расстоянии, равном 4 м от левой опоры,

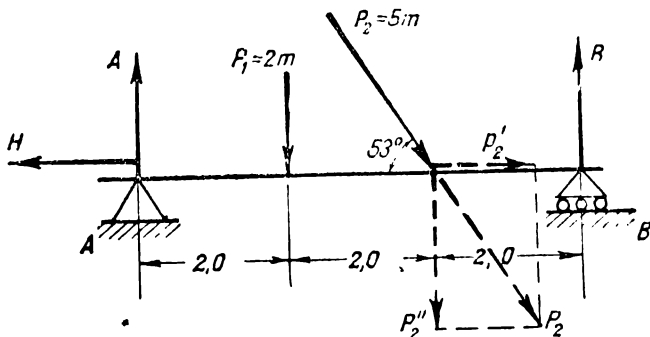


Рис. 64. Определение реакций опор.

и направлена наклонно вниз под углом $\alpha = 53^\circ$ к оси балки (рис. 64). Левая опора балки шарнирно-неподвижная, правая опора — шарнирно-подвижная. Определить опорные реакции балки.

Решение. Переносим силу P_2 по ее направлению так, чтобы она была приложена на оси балки, и разлагаем ее на две составляющие: горизонтальную P_2' и вертикальную P_2'' .

Величины этих составляющих определяем по масштабу чертежа:

$$P'_2 = 3,0 \text{ т}; P''_2 = 4,0 \text{ т}.$$

Заменяем действие опор реакциями A , H и B . Значит, на балку действует система нескольких сил (P_1 , P'_2 , P''_2 , A , H и B), которая находится в равновесии.

Условий равновесия имеем три, неизвестных величин тоже три: A , H и B . Следовательно система статически определима.

Напишем условия равновесия:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M = 0.$$

Удобнее применить вместо уравнения $\sum Y = 0$ второе уравнение моментов. Оба уравнения моментов следует брать относительно точек опор, так как при этом в каждое уравнение войдет лишь одна из неизвестных величин.

Тогда уравнения равновесия будут:

$$\sum X = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0.$$

Условие же $\sum Y = 0$ можно применить для проверки найденных значений реакций опор A и B .

I условие: $\sum X = 0$;

$$H + P_2' = 0; \quad H = -P_2' = -3,0 \text{ т}.$$

Знак минус указывает на то, что реакция H направлена влево.

II условие: $\sum M_A = 0$;

$$P_1 \cdot 2 + P_2'' \cdot 4 - B \cdot 6 = 0;$$

$$6B = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 20; \quad B = \frac{20}{6} = 3 \frac{1}{3} \text{ т}.$$

III условие: $\sum M_B = 0$;

$$A \cdot 6 - P_1 \cdot 4 - P_2'' \cdot 2 = 0;$$

$$6A = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 16; \quad A = \frac{16}{6} = 2 \frac{2}{3} \text{ т}.$$

Проверка: $\sum Y = 0; \quad A - P_1 - P_2'' = B = 0$;

$$2 \frac{2}{3} - 2 - 4 + 3 \frac{1}{3} = 0.$$

Опорные реакции определены правильно.

§ 10. ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДОВ СТАТИКИ

Пример 1. На рис. 65 изображен рычаг. На коротком плече его укреплен груз, а на длинное плечо налегает человек.

Чтобы ясно представить себе соотношение сил в процессе, изображенном на рис. 65,а, вводим вместо наглядного изображения схематическое (рис. 65,б).

Здесь допущен ряд упрощений. Прежде всего самый рычаг изображен простой линией, так как для выяснения действия внешних сил не имеют значения материал, из которого рычаг сделан, толщина рычага и т. п.

Не имеет значения и материал опоры; достаточно обозначить на чертеже точку, в которой рычаг подперт, и ее расстояние

от концов рычага. Неподвижную опору изображают в виде треугольника подобно опоре коромысла весов.

Точно так же для расчета не имеет значения, действует ли на длинное плечо рычага мускульная сила или подвешенный груз, как показано на рис. 65, б.

На рис. 65, в, который представляет собой еще более упрощенное изображение, вместо груза нарисована стрелка — вектор, показывающий направление, в котором действует сила человека, и ее величину.

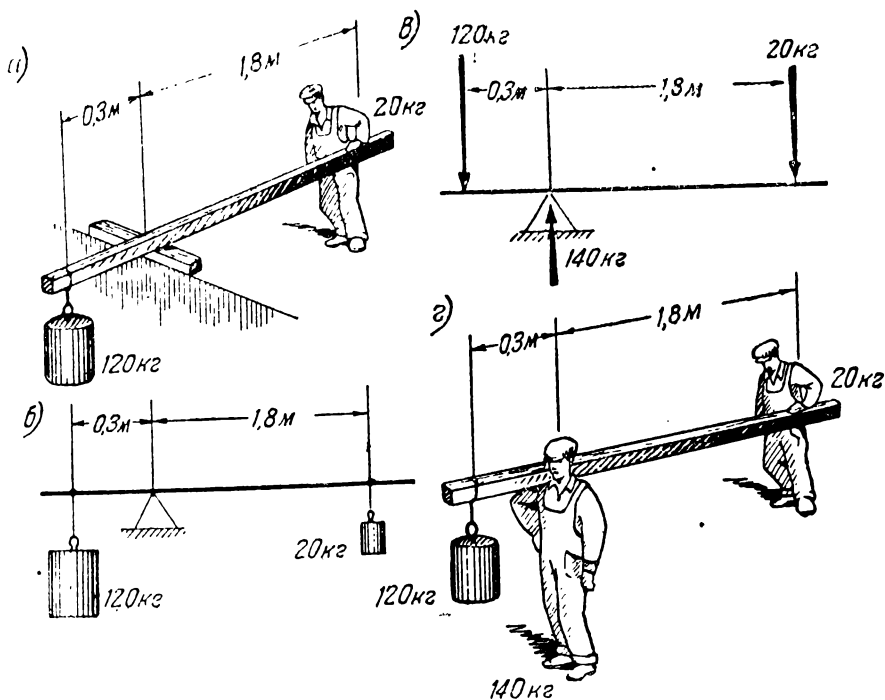


Рис. 65. Применение рычага:

а — общий вид; б и в — схематическое изображение; г — выявление реакции опоры рычага.

Подобным же образом обозначен и вес камня, действующий на короткое плечо рычага.

Стремясь свести задачу к простейшим элементам, мы пренебрегаем собственным весом рычага. Сделать это мы имеем право лишь тогда, когда собственный вес очень мал по сравнению со всеми другими силами, действующими на рычаг.

Допустим теперь, что камень весит 120 кг и что длинное плечо рычага в 6 раз больше короткого.

В таком случае человеку нужно будет развить силу, равную $\frac{1}{6}$ от 120 кг, для того, чтобы поднять камень, т. е. ту же силу, какую развил бы приложенный к длинному плечу груз в 20 кг.

Являются ли эти обе направленные отвесно вниз силы 120 и 20 кг единственными, которые действуют на наш рычаг? Очевидно, нет.

Представим себе, что рычаг в точке *C* покоится на плече человека, как показано на рис. 65,г.

Ясно, что этому человеку придется развить большое усилие, чтобы удерживать рычаг со всеми действующими на него силами. Противодействие, производимое нашей опорой на рычаг снизу, должно быть равно общей нагрузке рычага, т. е.

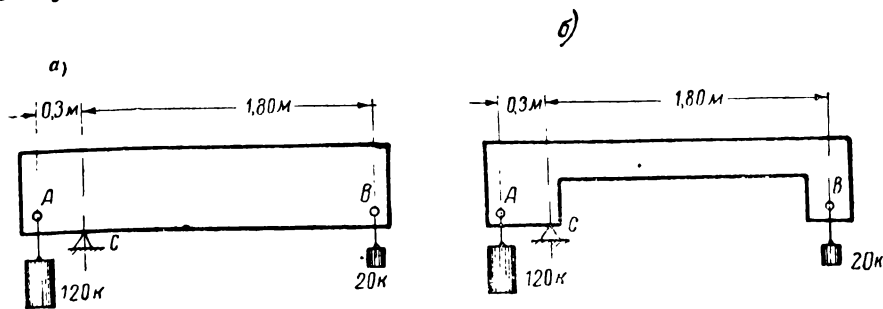


Рис. 66. Независимость равновесия рычага от формы рычага:
а — прямолинейный рычаг; *б* — рычаг усложненной формы.

$120 + 20 = 140$ кг. На схематическом чертеже (рис. 65,в) эта сила в 140 кг изображена стрелкой (вектором), направленной вверх. Это противодействие и называют реакцией опоры.

Пример 2. Рассмотрим тело более сложной формы.

Допустим, что из доски, изображенной на рис. 66,а и представляющей собой рычаг с тем же соотношением длин плеч, что и в примере 1, выпилен кусок (рис. 66,б).

Произойдет ли от этого какое-нибудь изменение во взаимодействии сил? Очевидно, нет, если не учитывать собственный вес доски.

Таким образом данное тело можно представить схематически в виде простого прямолинейного рычага, совершенно так же, как рычаг на рис. 65,в. Для равновесия всей системы в целом несущественно, какую форму имеют отдельные части, через которые

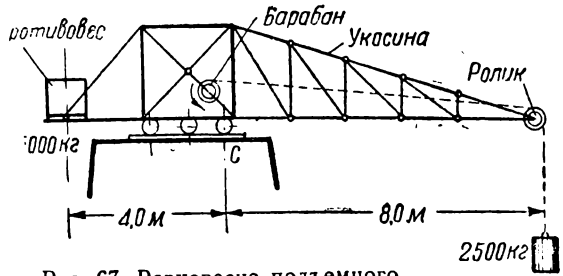


Рис. 67. Равновесие подъемного крана.

сила в 20 кг передается точке опоры *C*.

Пример 3. Указанное в примере 2 применим к подъемному крану, схематически изображенному на рис. 67.

Кран снабжен колесами, при помощи которых он может поворачиваться на неподвижном фундаменте или помосте.

Кран поднимает груз в 2 500 кг. Если бы у крана не было противовеса, то груз опрокинул бы кран. При этом кран повернулся бы вокруг колеса С так, что задние колеса поднялись бы вверх.

Требуется определить, какой величины должен быть противовес для того, чтобы воспрепятствовать опрокидыванию крана.

При этом принимается, что груз, как изображено на чертеже, находится на расстоянии 8 м, а противовес — на расстоянии 4 м от колеса С, т. е. от неподвижной точки вращения.

Мы имеем рычаг, к которому приложена внешняя сила в 2 500 кг, действующая на расстоянии 8 м от точки опоры. Так как противовес действует на расстоянии всего лишь 4 м от точки опоры, то он должен быть вдвое тяжелее, т. е. иметь вес в 5 000 кг.

Практически его вес будет больше 5 000 кг, так как мы не учитывали некоторые обстоятельства, например собственный вес укосины крана, который должен быть также уравновешен противовесом.

Схематический рис. 68 дает все, что нам необходимо для расчета условий равновесия. Мы знаем, что эти условия для рычага выражаются так: сумма моментов сил должна быть равна нулю. Когда сила в 2 500 кг действует на плечо в 8 м, ее момент равняется $2\,500 \cdot 8 = 20\,000$ кг и действует вправо. Момент противовеса равняется $5\,000 \cdot 4 = 20\,000$ кг и действует влево.

Таким образом $\sum M = 20\,000 - 20\,000 = 0$.

Может показаться, что если снять поднимаемый груз, то кран опрокинется налево под влиянием противовеса. Это не произойдет потому, что в этом случае точкой опоры становится не колесо С, а крайнее левое колесо. Тогда противовес, действуя на очень короткое плечо рычага, не может преодолеть действия собственного веса незагруженной укосины крана.

Пример 4. Снова возьмем поставленную на ребро доску и подвесим к ней грузы не на одной горизонтальной линии, как было, а на разной высоте так, чтобы точка подвеса В лежала значительно выше второй точки подвеса А (рис. 69).

Произойдет ли от этого какое-нибудь изменение в условиях равновесия? Очевидно, нет,

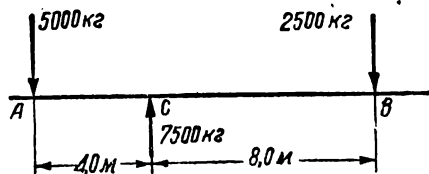


Рис. 68. Схематическое изображение сил, действующих на кран.

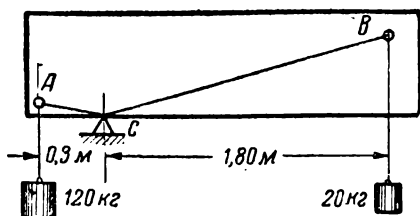


Рис. 69. Независимость равновесия рычага от перенесения силы по ее направлению.

Таким образом для расчета равновесия рычага важны не наклонные расстояния от B и A до C , а лишь те расстояния по прямой, которые на рис. 69 обозначены числами 1,8 и 0,3 м, т. е. расстояния сил до точки опоры рычага, измеренные перпендикулярно к направлению сил, иначе говоря, плечи моментов сил.

Отсюда следует, что и для поворотного крана с приподнятой стрелой, изображенного на рис. 70,а, условия равновесия необходимо рассчитывать таким образом, как и для крана, изображенного на рис. 67.

Для расчета вместо рис. 70,а возьмем рис. 70,б.

Пример 5. На рис. 71,а показана металлическая балка с подвешенным грузом в 3000 кг. Своими концами балка опирается на кирпичные стены. Расстояние между точками A и B опор балки 6,0 м. Расстояние точки приложения груза C от правой опоры балки 1,5 м.

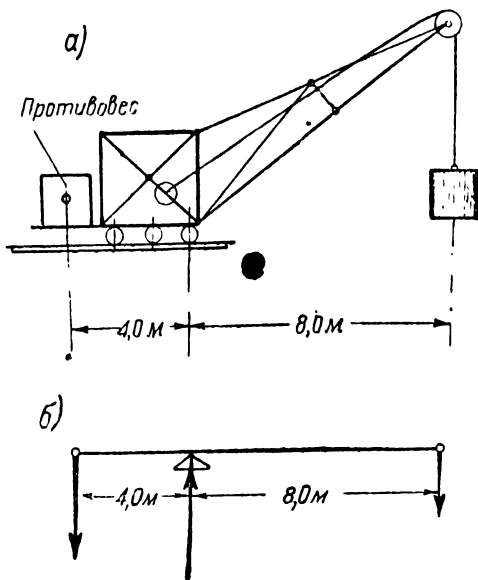


Рис. 70. Наклонный подъемный кран и силы, к нему приложенные.

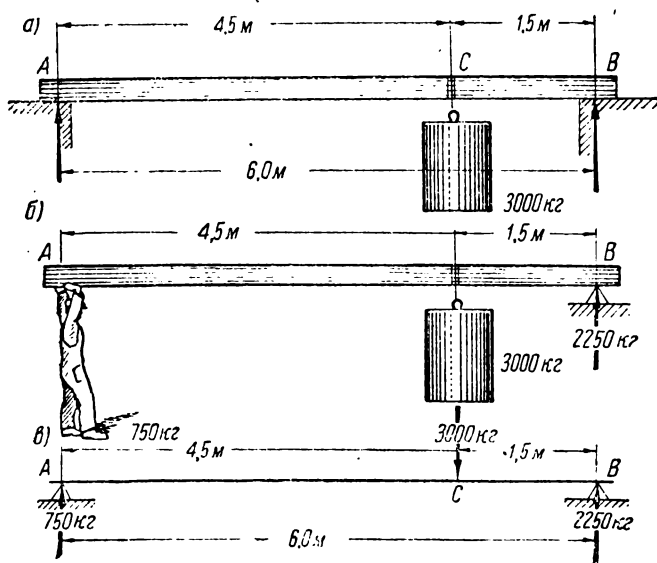


Рис. 71. Определение реакций опор.

Требуется определить величину давления, испытываемого опорами. Представим себе, что вместо левой опоры поставлен человек, который поддерживает конец A балки (рис. 71,6). Человек этот должен давить на балку снизу вверх, противодействуя тому моменту, который вызывается грузом C в 3000 кг, стремящимся повернуть рычаг вокруг точки опоры B вниз. Момент груза равняется $3000 \cdot 1,5 = 4500$ кг, а так как наш воображаемый человек действует на плечо рычага длиной в 6 м, то ему придется выдерживать нагрузку в $4500 : 6 = 750$ кг. Другими словами, на левую опору будет действовать давление в 750 кг, на правую опору придется остаток давления, равный $3000 - 750 = 2250$ кг.

Ту же балку можно представить себе схематически в виде рычага, показанного на рис. 71,в. В точках A , B и C на рычаг действуют силы: одна сила, направленная вниз, и две — направленные вверх.

Вместо того, чтобы рассматривать B как точку опоры рычага, можно за точку опоры принять точку A . Сила в 750 кг проходит через эту точку и не имеет плеча, момент этой силы равен нулю. Сила в 3000 кг стремится повернуть рычаг направо вниз, развивая момент, равный $3000 \cdot 4,5 = 13500$ кгм, сила же в 2250 кг стремится повернуть рычаг налево вверх, развивая момент в $2250 \cdot 6 = 13500$ кгм. Таким образом действия обоих моментов взаимно уничтожаются и наш расчет остается верным и при этом допущении.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется моментом силы относительно точки?
2. Как определить знак момента?
3. Когда момент силы относительно точки равен нулю?
4. Что называют центром момента?
5. Какая зависимость между моментом равнодействующей силы и моментом составляющих сил?
6. Что определяет действие пары?
7. Что такое рычаг?
8. В чем отличие рычага первого рода от рычага второго рода?
9. В чем заключается условие равновесия рычага?
10. Возможна ли замена нескольких пар, действующих на тело, одной парой?
11. Чему равен момент равнодействующей пары?
12. Назовите условие равновесия пар.
13. Как осуществить перенесение силы параллельно самой себе?
14. Сформулируйте общие условия равновесия.

II. КИНЕМАТИКА

В статике мы определяли условия равновесия сил, приложенных к твердому телу. Если силы, приложенные к телу, не удовлетворяют условиям равновесия, тело приходит в движение.

Движением тела называется непрерывное изменение его положения в пространстве.

В кинематике изучается движение, без рассмотрения вопроса о силах, движущих тело.

Глава 1. РАВНОМЕРНОЕ И ПЕРЕМЕННОЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

При наблюдении происходящих вокруг нас явлений часто возникает представление о равномерном движении. Хотя нет такого движения кроме вращения земли вокруг своей оси, которое можно было бы назвать вполне равномерным, все же многие движения практически считаются равномерными в известных пределах. Например движение поезда, идущего полным ходом на ровном участке пути; подобное же движение автомобиля и т. д.

Равномерным называется такое движение, при котором в равные промежутки времени тело проходит равные расстояния.

Равномерные движения тел различаются своими скоростями. Скоростью равномерного движения называют расстояние, проходимое телом в единицу времени.

Скорость обозначается буквой v .

Допустим, что скорость тела $v = 2$ м/сек, т. е. тело в 1 сек. проходит расстояние, равное 2 м. Тогда

$$\begin{array}{l} \text{в 2 сек. тело пройдет } 2 \cdot 2 = 4 \text{ м} \\ \text{„ 3 „ „ „ „ } 3 \cdot 2 = 6 \text{ „ и т. д.} \end{array}$$

Обозначим буквой t время; буквой s — пройденное расстояние. Тогда

$$s = vt, \quad (1)$$

т. е. путь, пройденный телом при равномерном движении, численно равен скорости тела, умноженной на время, в течение которого пройден рассматриваемый путь.

С помощью этого уравнения решаются различные задачи о равномерном движении.

Так например, если надо определить скорость v , то из уравнения (1) находим:

$$v = \frac{s}{t},$$

т. е. скорость равномерного движения численно равна пройденному пути, деленному на время.

Для определения времени t из уравнения (1) получим:

$$t = \frac{s}{v}.$$

Пример 1. Самолет летел равномерно со скоростью 50 м/сек в течение 1 часа.

Определить пройденное расстояние.

Решение. $s = vt = 50 \cdot 3600 = 210\,000$ м = 210 км.

Пример 2. В течение 45 мин. поезд, двигавшийся равномерно, прошел 60 км.

Определить скорость поезда.

Решение. $v = \frac{s}{t} = \frac{60\,000}{45 \cdot 60} = 22,2$ м/сек.

Пример 3. Автомобиль, двигаясь равномерно со скоростью 5 м/сек, прошел 45 м. Определить время движения.

Решение. Задача решается по формуле $t = \frac{s}{v}$.

Подставляя в эту формулу числа, получим:

$$t = 45 \text{ м} : 5 \text{ м/сек} = 9 \frac{\text{м} \cdot \text{сек}}{\text{м}} = 9 \text{ сек.}$$

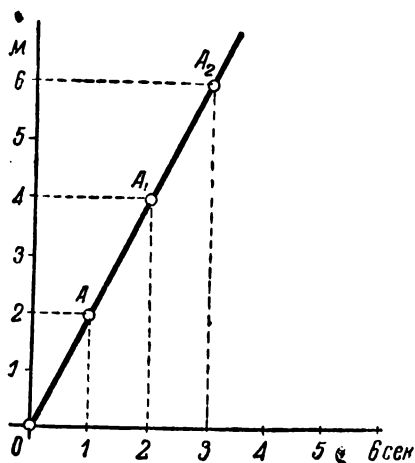


Рис. 72. Изображение равномерного движения на графике.

Зависимость пройденного расстояния от времени может быть изображена графически. Для этой цели будем откладывать промежутки времени по горизонтальной оси координат, а расстояние — по вертикальной (рис. 72).

Пусть скорость равномерного движения $v = 2 \text{ м/сек}$.

Тогда через 1 сек. тело будет находиться в точке A; через 2 сек. — в точке A₁ и т. д.

Соединим эти точки — получим прямую линию.

Таким образом при равномерном движении зависимость пройденного расстояния от времени графически изображается прямой линией.

График показывает, в каком месте пути находится движущееся тело в любой момент.

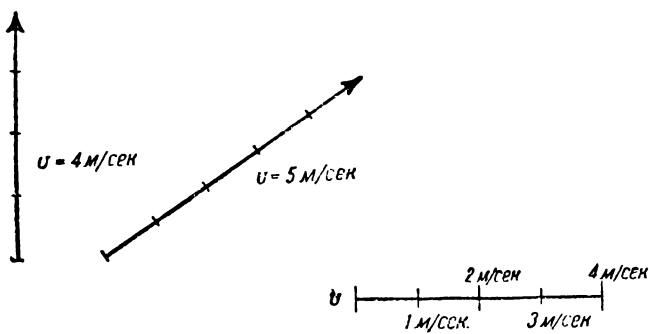


Рис. 73. Скорость-вектор.

Если по одному пути движется несколько тел, то с помощью графика легко определить, на каком расстоянии они находятся друг от друга. Поэтому графики часто применяются для изображения движения поездов.

Равномерные прямолинейные движения могут различаться не только величиной своих скоростей, но и направлением их. Следовательно скорость есть вектор, и ее можно изобразить напра-

вленным отрезком. Величина отрезка соответствует в масштабе числовому значению данной скорости, а стрелка указывает ее направление (рис. 73).

§ 2. СКОРОСТЬ ПЕРЕМЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Движение тела называется переменным, если расстояния, проходимые телом в равные промежутки времени, не равны между собой.

Поясним, как определяется скорость переменного движения. Для этого сначала сформулируем понятие средней скорости.

Средней скоростью за некоторый промежуток времени называется такая скорость, которую должно иметь тело, если предположить, что оно двигается в течение этого времени равномерно.

Например в течение 20 мин. поезд двигался с переменной скоростью и прошел 40 км.

Средняя скорость его $40 : 20 = 2$ км/мин.

Средняя скорость будет тем ближе к действительной скорости, чем меньше тот промежуток времени, для которого средняя скорость вычисляется, так как чем меньше промежуток времени, тем меньше будут и происходящие в течение его изменения скорости.

Скоростью переменного движения в какой-нибудь момент (кратчайший промежуток) времени называется такая скорость, которую имело бы тело, если бы в данный момент изменение скорости прекратилось и тело продолжало двигаться равномерно.

§ 3. РАВНОМЕРНО ПЕРЕМЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Большое значение имеет один из видов переменного движения, а именно движение равномерно ускоренное.

Равномерно ускоренным называется такое движение, при котором в равные промежутки времени прибавляются и равные величины скорости.

Отношение прибавления скорости ко времени, в течение которого это прибавление произошло, называется ускорением.

Пусть например в некоторый момент времени скорость равномерно ускоренного движения тела была 2 м/сек, а через 10 сек. стала 4 м/сек. За 10 сек. скорость изменилась на 4 м/сек — 2 м/сек = 2 м/сек. Ускорение движения составит $\frac{4-2}{10} = 0,2$ м/сек за 1 сек.

Величина ускорения получается от деления скорости (именование м/сек) на время (именование сек.); поэтому именование ускорения будет:

$$\text{м/сек} : \text{сек.} = \frac{\text{м}}{\text{сек.} \times \text{сек.}} = \text{м/сек}^2.$$

Равномерно переменное движение, скорость которого уменьшается, называется равнозамедленным.

Если в некоторый момент времени скорость равнозамедленного движения тела была 15 м/сек , а через 20 сек. стала 10 м/сек , то ускорение в этом движении составит:

$$\frac{10 \text{ м/сек} - 15 \text{ м/сек}}{20 \text{ сек.}} = -0,25 \text{ м/сек}^2.$$

В равноускоренном движении скорость тела увеличивается, ускорение имеет положительный знак. Если ускорение имеет отрицательный знак, то такое движение будет замедленным.

Ускорение, как и скорость, есть вектор, т. е. величина, определяемая числовым значением и направлением.

Галилей открыл, что все падающие тела двигаются равномерно ускоренно.

Ускорение свободно падающего тела в безвоздушном пространстве составляет приблизительно $9,8 \text{ м/сек}^2$. Эту величину обозначают буквой g .

Итак, $g = 9,8 \text{ м/сек}^2$.

Если начальная скорость тела равна нулю — $v_0 = 0$, то в конце 1-й сек. скорость тела составит $v_1 = 9,8 = g$;

" " 2-й " " " " $v_2 = 9,8 + 9,8 = 19,6 = 2g$;

" " 3-й " " " " $v_3 = 19,6 + 9,8 = 29,4 = 3g$;

" " 4-й " " " " $v_4 = 29,4 + 9,8 = 39,2 = 4g$

и т. д.

В конце секунды t скорость тела v будет:

$$v = gt. \quad (2)$$

Найденное выражение показывает, что скорость равноускоренного движения в какой-либо момент пропорциональна времени, истекшему от начала падения.

Путь, пройденный телом от начала падения, определяем, исходя из следующих соображений. Скорость увеличивается непрерывно, поэтому средняя скорость данного движения, определяемая в какую-нибудь секунду, будет равна полусумме начальной и конечной скоростей движения в эту секунду. Следовательно:

в конце 1-й сек. тело пройдет путь

$$\frac{0 + 9,8}{2} = 4,9 \text{ м} = \frac{g}{2};$$

в конце 2-й сек. тело пройдет путь

$$4,9 + \frac{9,8 + 19,6}{2} = 19,6 \text{ м} = 4 \frac{g}{2};$$

в конце 3-й сек. тело пройдет путь

$$19,6 + \frac{19,6 + 29,4}{2} = 44,7 \text{ м} = 9 \frac{g}{2};$$

в конце 4-й сек. тело пройдет путь

$$44,1 + \frac{29,4 + 39,2}{2} = 78,4 \text{ м} = 16 \frac{g}{2}$$

и т. д.

Рассматривая вышеприведенные результаты (крайние столбцы), замечаем в них следующую закономерность:

в удвоенное время пройден путь, в 4 раза больший; в утроенное время пройден путь, в 9 раз больший, и т. д.

Обозначая пройденное расстояние, как и в случае равномерного движения, буквой s , а истекшее время буквой t , получим:

$$s = \frac{g}{2} t^2, \quad (3)$$

т. е. путь, пройденный равноускоренным движением, пропорционален квадрату времени.

Уравнения (2) и (3) выражают законы падения тел, открытые Галилеем.

Эти уравнения действительны для любого равномерно ускоренного движения, надо только указать в них величину ускорения.

Поскольку буква g обозначает определенную величину ускорения падающего тела, уравнения (2) и (3) для любого равноускоренного движения записывают так:

$$v = at; \quad (2)$$

$$s = \frac{at^2}{2}. \quad (3)$$

Пример 1. Брошенный в колодец камень достиг воды через 3 сек. Определить глубину колодца.

Решение. Пусть s , пройденный камнем, определим по уравнению $s = \frac{gt^2}{2}$; имеем $g = 9,8 \text{ м/сек}^2$; $t = 3 \text{ сек.}$

$$s = \frac{9,8 \cdot 3^2}{2} = 44,1 \text{ м.}$$

Пример 2. Парашютист совершил затяжной прыжок с высоты 3000 м и открыл парашют через 20 сек. от начала падения.

1) Определить, на каком расстоянии от земли был открыт парашют.

2) Определить скорость падения в конце 2-й сек.

Спротивление, оказываемое воздухом, не учитывать.

Решение. 1) Пройденный путь с закрытым парашютом:

$$s = \frac{9,8 \cdot 20^2}{2} = 1960 \text{ м.}$$

Расстояние от земли в момент раскрытия парашюта:

$$3000 - 1960 = 1040 \text{ м.}$$

2) Скорость падения в конце 20-й сек.:

$$v = gt = 9,8 \cdot 20 = 196 \text{ м/сек.}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое движение называется равномерным?
2. Дайте определение скорости равномерного движения.
3. Напишите уравнения равномерного движения.
4. Определить скорость равномерного движения, если даны пройденный путь и время движения.
5. Что называется средней скоростью движения?
6. Дайте определение равноускоренного движения.
7. Что такое ускорение движения?
8. Определить расстояние, пройденное телом, если даны величины ускорения и время движения.

Глава 2. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Поступательным называется такое движение, при котором все точки тела проходят равные

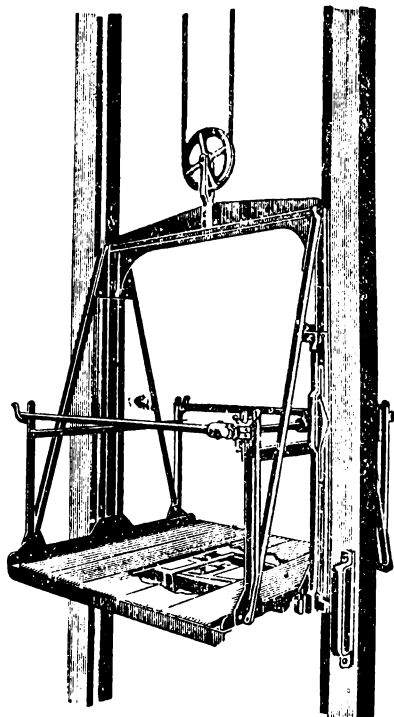


Рис. 74. Поступательное движение подъемника.

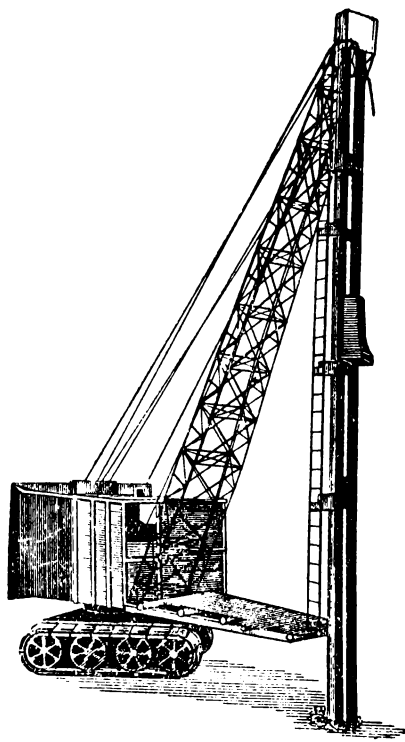


Рис. 75. Поступательное движение бабы копра.

пути и движутся с равными скоростями. Поступательное движение тела вполне определяется по движению любой его точки.

Самый простой случай поступательного движения есть тот, когда все точки тела движутся прямолинейно и равномерно.

Такое движение называется прямолинейным и равномерным поступательным движением. Например равномерное движение поезда, идущего на прямом участке пути.

Поступательное движение часто встречается в различных механизмах. Например движение платформы подъемника по направляющим (рис. 74), движение бабы копра (рис. 75) и т. п.

Таким образом все сказанное в главе 1 о движении тел относится в равной мере к движению простейшего тела—материальной точки или же к телам любых размеров и форм,двигающихся поступательно.

Иначе обстоит дело в случае вращательного движения тел:

§ 2. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Вращательным называют такое движение тела, при котором одна прямая в теле остается неподвижной, все же остальные точки тела описывают окружности около этой прямой.

Неподвижная прямая называется осью вращения.

Примеры вращательного движения многочисленны; это движение маховиков, валов, шкивов (рис. 78) и т. п. Разберем случай равномерного вращения. Для этой цели рассмотрим движение отдельной точки A на ободе шкива (рис. 76). Скорость, с которой движется эта точка, называется ее окружной или линейной скоростью. Она измеряется длиной дуги AB , пройденной в единицу времени; следовательно линейную скорость можно вычислить, зная радиус шкива и число оборотов в 1 сек.

Пример: Шкив делает 10 оборотов в 1 сек. Радиус шкива 0,2 м. Вычислить линейную скорость точки A , лежащей на ободе.

Решение. Вычислим длину окружности, т. е. тот путь, который пройдет точка за один оборот шкива.

Длина окружности $2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,2 = 1,25$ м.

Теперь определим скорость точки A , т. е. путь, пройденный точкой в 1 сек., в течение которой шкив делает 10 оборотов:

$$v = 1,25 \cdot 10 = 12,5 \text{ м/сек.}$$

Обозначим число оборотов буквой n ; тогда получим выражение линейной скорости в общем виде:

$$v = 2\pi r \cdot n, \quad (a)$$

т. е. линейная скорость точки равна длине окружности, умноженной на число оборотов.

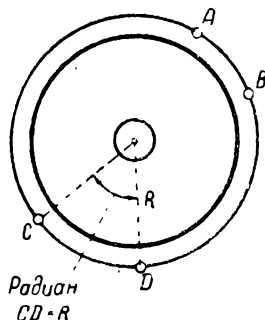


Рис. 76. Перемещение точек шкива.

Точки, расположенные на разных расстояниях от оси, движутся с различной скоростью. При одном и том же числе оборотов линейная скорость точки возрастает с увеличением радиуса вращения точки.

Поэтому для общей характеристики вращательного движения тела ввели понятие угловой скорости.

Эта скорость измеряется величиной угла, на который повернется тело в 1 сек.

За единицу такого перемещения тела принимается радиан, т. е. центральный угол, длина дуги которого CD равна радиусу (рис. 76). Длина окружности $2\pi r$, следовательно один оборот соответствует $2\pi = 2 \cdot 3,1$ радианам.

Возьмем на теле точку, отстоящую от оси вращения на единицу длины, например 1 см; значит, радиус вращения этой точки $r = 1$ см. Точка будет описывать окружности длиной $2\pi \cdot 1$, и величина линейной скорости точки будет численно равна угловой скорости. Итак, угловая скорость численно равна линейной скорости точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии, равном единице длины.

Положим в уравнении (а) $r = 1$ и обозначим угловую скорость буквой ω , тогда

$$\omega = 2\pi n. \quad (б)$$

Наименование единицы угловой скорости рад/сек.

Пример. Шкив делает 540 оборотов в 1 мин. Определить его угловую скорость.

Решение. Имеем в 1 сек. $540 : 60 = 9$ оборотов.

$$\omega = 9 \cdot 2 \cdot 3,14 = 56,52 \text{ рад/сек.}$$

Обратимся вновь к уравнению $v = 2\pi n r$ и заметим, что множитель $2\pi n$ можно заменить обозначением ω . Получим:

$$v = \omega r,$$

т. е. линейная скорость вращения какой-нибудь точки равна угловой скорости, умноженной на радиус вращения точки.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Приведите пример поступательного движения.
2. Дайте определение окружной скорости точки.
3. Выразите зависимость между угловой и линейной скоростями.
4. В чем основная разница между поступательным и вращательным движениями?

Глава 3. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Используем некоторые полученные результаты для рассмотрения кинематики передаточных механизмов.

Эти механизмы, передавая движение, изменяют его скорость и направление. Рассмотрим следующие две группы передаточных механизмов:

1) механизмы, передающие движение непосредственным прикосновением, например зубчатая передача (рис. 77);

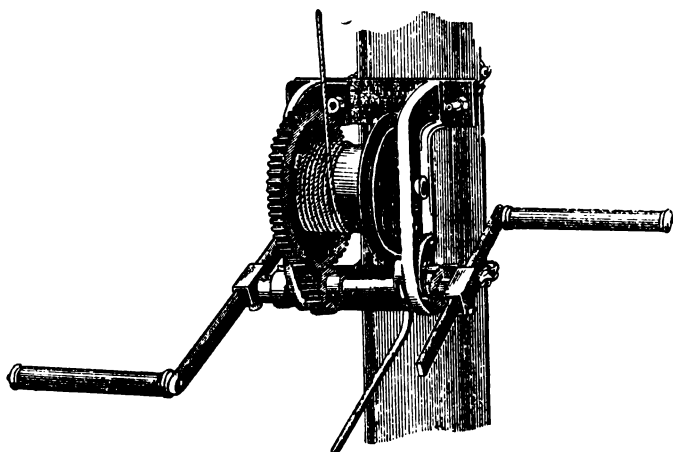


Рис. 77. Зубчатая передача.

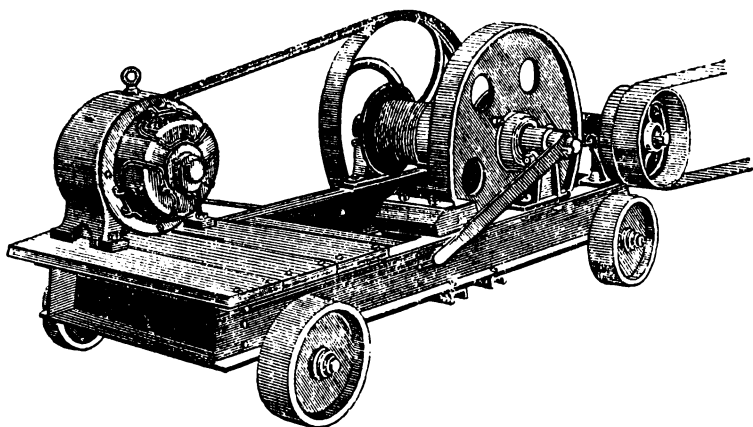


Рис. 78. Ременная передача.

2) механизмы, передающие движение с помощью гибких тел, например ременная передача (рис. 78).

§ 1. ПЕРВАЯ ГРУППА ПЕРЕДАЧ

Гладкие цилиндрические колеса

Рассмотрим передачу движения посредством гладких цилиндрических колес, так называемую фрикционную передачу (рис. 79).

Положим, что нужно передать движение между параллельными осями O_1 и O_2 (рис. 80).

Мы можем достигнуть этого, насаживая на оси два шкива, которые соприкасаются в точке A , нажимая друг на друга. Шкив, который передает движение, называется ведущим, а шкив, который принимает движение, — ведомым. Допустим, что ведущим является шкив O_1 . При своем вращении он будет увлекать шкив O_2 , причем линейные скорости обоих шкивов в точке A будут одинаковы.

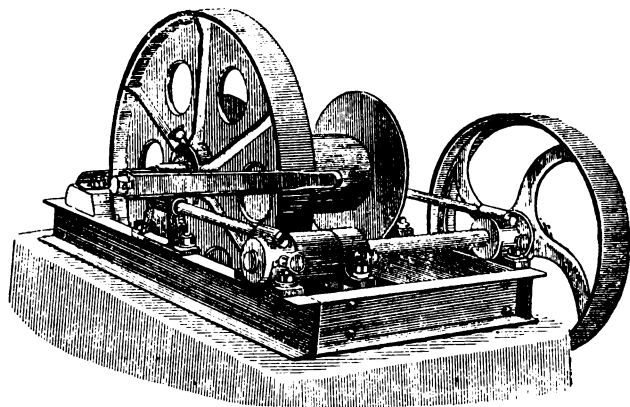


Рис. 79. Фрикционная передача.

Выведем отношение между угловыми скоростями ω_1 и ω_2 шкивов O_1 и O_2 .

☛ Линейная скорость какой-нибудь точки равна угловой скорости, умноженной на радиус. Называя линейную скорость точки A левого шкива через v_1 , а правого через v_2 , будем иметь:

$$v_1 = \omega_1 r_1,$$

$$v_2 = \omega_2 r_2,$$

но

$$v_1 = v_2,$$

поэтому и

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2.$$

Отсюда следует пропорция:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1},$$

Рис. 80. Передача движения между двумя параллельными осями.

т. е. угловые скорости относятся обратно пропорционально радиусам шкивов.

Зависимость числа оборотов от их радиусов получим следующим образом.

Напишем выражение линейной скорости точки A для шкива O_1 и для шкива O_2 .

$$v_1 = 2\pi r_1 n_1$$

и $v_2 = 2\pi r_2 n_2,$

но $v_1 = v_2,$

значит $2\pi r_1 n_1 = 2\pi r_2 n_2$

или $n_1 r_1 = n_2 r_2.$

Отсюда получаем:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

т. е. число оборотов обратно пропорционально радиусам шкивов.

Пропорция, очевидно, не изменится, если мы величины радиусов заменим соответствующими величинами диаметров d_1 и d_2 . Тогда можно сказать, что число оборотов обратно пропорционально диаметрам шкивов.

Отношение числа оборотов $\frac{n_2}{n_1}$ называется передаточным числом и обозначается буквой k .

Итак

$$k = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Следовательно: а) передаточное число равно отношению радиуса ведущего шкива к радиусу ведомого или отношению диаметров этих шкивов;

б) Передаточное число показывает число оборотов, которое делает ведомый шкив в то время, когда ведущий шкив делает 1 оборот.

Пример. Определить радиус ведомого шкива, если радиус ведущего шкива $r = 200$ мм, а передаточное число $k = 2$.

Решение. Имеем: $k = \frac{r_1}{r_2}$ или $2 = \frac{200}{r_2}$, $r_2 = \frac{200}{2} = 100$ мм.

Фрикционная передача отличается плавностью хода, так как при быстром нарастании силы один обод проскальзывает по другому и тем предохраняет передачу от удара. С другой стороны, в этом кроется и недостаток передачи, так как она не может передавать значительных усилий. Фрикционная передача производится всегда от большого шкива к меньшему.

Зубчатые цилиндрические колеса

Если передаваемая между осями сила велика, то вместо гладких колес употребляют зубчатые (рис. 77).

Для изготовления зубчатой передачи намечают две окружности, которые бы передавали движение с желаемым отношением оборотов, и разделяют их на равные части (рис. 81). Эти части, называются шагом колеса, а упомянутые окружности называются начальными окружностями. На каждом шаге вычерчивается контур зубца $ABCD$. Промежуток между зубцами делается немного

более ширины зуба, этим достигается то, что зубцы не защемляются.

В зубчатой передаче можно вывести отношение угловых скоростей и передаточное число с помощью начальных окружностей, но так как эти окружности на колеса не нанесены, то на практике удобнее пользоваться числами зубцов.

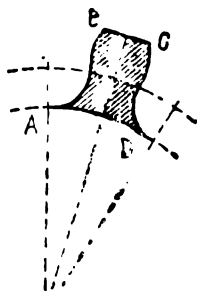


Рис. 81. Начальные окружности и контур зуба передачи.

Мы нашли для гладких колес, что

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Пусть число зубцов на первом колесе есть m_1 , а на втором m_2 , тогда

$$m_1 = \frac{2\pi r_1}{l}$$

$$m_2 = \frac{2\pi r_2}{l},$$

где l есть длина шага первого и второго колес, так как сцеплять можно только колеса, имеющие равные шаги.

Из этого следует, что

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

т. е. угловые скорости зубчатых колес обратно пропорциональны числам зубцов.

Так же определяется передаточное число k .

$$k = \frac{\text{число зубцов ведущего колеса}}{\text{число зубцов ведомого колеса}} = \frac{\text{число оборотов ведомого колеса}}{\text{число оборотов ведущего колеса}}.$$

Пример. Ведущее колесо имеет 20 зубцов; передаточное число $k = \frac{1}{4}$. Определить число зубцов ведомого колеса.

Решение. $k = \frac{m_1}{m_2}; \frac{1}{4} = \frac{20}{m_2};$

$$m_2 = 80 \text{ (зубцов).}$$

Для удовлетворительной работы зубчатых колес необходимо, чтобы передаточное число не выходило за некоторые пределы, а именно:

в трансмиссиях:

$$6 \geq k \geq \frac{1}{6};$$

в подъемниках:

$$10 \geq k \geq \frac{1}{10}.$$

Это значит, что передача движения зубчатыми колесами может осуществляться от большего колеса к меньшему, и наоборот; однако радиусы сцепляемых колес не должны превосхо-

доть друг друга, более чем в 6 или 10 раз в зависимости от назначения передачи. Зубчатые колеса широко применяются в технике для самых различных случаев передачи движения.

§ 2. ВТОРАЯ ГРУППА ПЕРЕДАЧ

В этой группе применяются гибкие тела: ремни, стальные ленты, канаты и цепи.

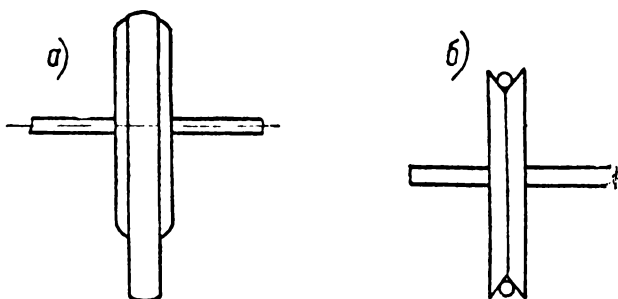


Рис. 82. Шкивы:

a — для ременной передачи; *б* — для канатной передачи.

Ремни и ленты надеваются на гладкие шкивы; причем для ремней применяют шкивы с выпуклой серединой (рис. 82, *a*), чтобы ремень не соскакивал, так как замечено, что ремень переходит в ту сторону, где он более растянут.

Для канатной передачи служат желобчатые шкивы (рис. 82, *б*). Цепи надеваются на зубчатые шкивы.

Передача движения между параллельными осями

Когда оси параллельны, то движение передается с помощью двух шкивов, помещенных в одной плоскости, и бесконечного ремня, открытого (рис. 83, *a*) или перекрестного (рис. 83, *б*). В первом случае оба шкива вращаются в одну сторону, а во втором — в разные стороны.

Во втором случае ремень перекручивается на 180° . Этим достигается то, что ремень прижимается к обоим шкивам одной и той же поверхностью.

Ремень не должен иметь скольжения по поверхности шкивов. Поэтому отношение скоростей шкивов при ременной передаче равно полученному отношению при фрикционной передаче.

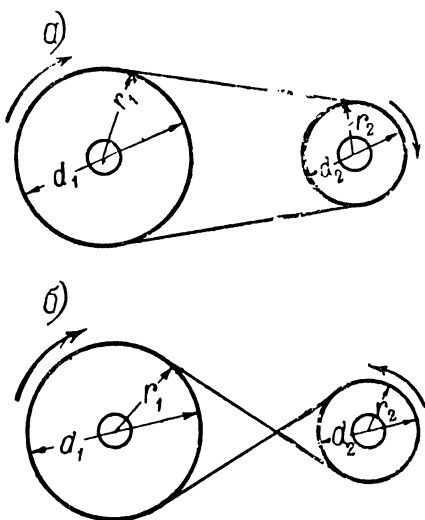


Рис. 83. Передача движения между двумя параллельными осями:

a — посредством открытого ремня; *б* — посредством перекрестного ремня.

Следовательно можно написать, что передаточное число

$$k = \frac{n_2}{n_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Пример. 1) Определить радиус ведущего шкива ременной передачи, если радиус ведомого шкива 450 мм, а передаточное число $k = \frac{1}{3}$.

2) Определить число оборотов ведомого шкива, если ведущий делает 300 об/мин.

Решение: 1) $k = \frac{r_1}{r_2}$; $\frac{1}{3} = \frac{r_1}{450}$;

$$r_1 = 150 \text{ мм};$$

2) $k = \frac{n_2}{n_1}$; $\frac{1}{3} = \frac{n_2}{300}$;

$$n_2 = 100 \text{ об/мин.}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Опишите назначение передаточных механизмов.
2. Приведите пример двух групп передач.
3. Что такое фрикционная передача?
4. Что называется передаточным числом?
5. Дайте определение передаточного числа зубчатых колес.
6. Даны диаметры шкивов ременной передачи. Узнать передаточное число.

III. ДИНАМИКА

В динамике разрешаются в основном две задачи:

1) каковы должны быть силы, производящие данное движение;

2) какое движение получит тело под действием данных сил.

Изложение динамики опирается на три аксиомы, которые называются законами движения.

Первые два закона были открыты Галилеем, а третий — Ньютоном.

Глава 1. ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ

Галилей, изучая движение бросаемых тел, пришел к следующему выводу:

„Когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая никакого сопротивления движению, движение его является равномерным и продолжалось бы бесконечно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца.

Если же плоскость конечна и расположена высоко, то тело, имеющее вес, достигнув конца плоскости, продолжает двигаться таким образом, что к его первоначальному равномерному, беспрепятственному движению присоединяется другое, вызываемое силой тяжести. Благодаря этому возникает сложное движение,

слагающееся из равномерного горизонтального и естественно-ускоренного движения.

Его я называю движением бросаемых тел“. („Беседы“.)

Например шар *M*, получив толчок, катится прямолинейно и равномерно до конца плоскости (рис. 84, *a*), где он начинает падение, совершая сложное движение по криволинейному пути.

Указание Галилея Ньютон обобщил следующим образом.

§ 1. ПЕРВЫЙ ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ

Всякое тело сохраняет состояние своего покоя или прямолинейного и равномерного движения до тех пор, пока какая-нибудь сила не изменит это состояние.

Затем Ньютон приводит примеры:

„Брошенное тело продолжает свое движение, пока его не замедлит сопротивление воздуха и пока сила тяжести не заставит это тело упасть. Волчок не перестает вращаться (равномерно), пока это вращение не замедлится сопротивлением воздуха“.

Свойство тел сохранять состояние покоя или постоянную скорость называется инерцией, поэтому первый закон называют также законом инерции.

Приведем еще несколько примеров, выявляющих этот закон. Так, если автобус, трамвай или поезд внезапно останавливаются, то пассажиры наклоняются или падают вперед, потому что верхние части их тел продолжают движение. Наоборот, при внезапном начале движения пассажиры могут упасть назад.

Получив толчок от маневрового паровоза, вагон проходит значительный участок горизонтального пути и останавливается лишь вследствие сопротивления воздуха и трения, если нет других препятствий.

Мы не встречаем в природе тел, движущихся строго прямолинейно и равномерно потому, что все движущиеся тела приходят в соприкосновение с другими телами, которые препятствуют им двигаться или заставляют изменять движение.

Опыт показывает, что различные тела обладают различной

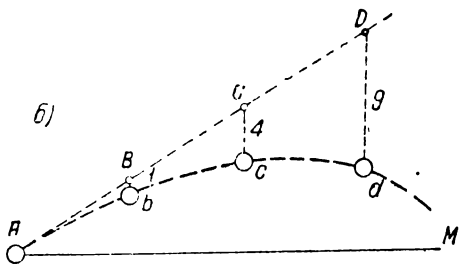
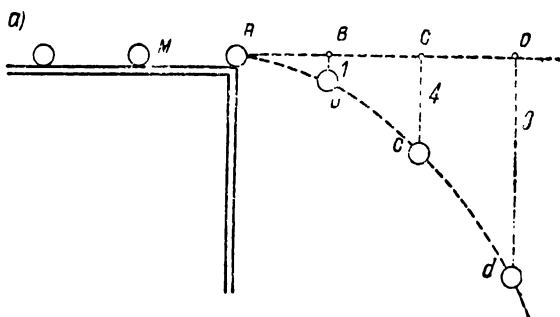


Рис. 84. Движение брошенных тел:

a — горизонтально брошенное тело; *b* — тело, брошенное вверх под углом к горизонту.

инерцией, зависящей от количества вещества, находящегося в теле. Это количество вещества называется массой тела и обозначается буквой m .

В телах, состоящих из одного и того же вещества одинаковой плотности, масса тем больше, чем больше объем тела. Следовательно по объемам однородных тел можно судить об их массах.

Массы тел неоднородных или имеющих сложную форму можно сравнить посредством рассмотрения действий сил на эти тела.

Так например, из двух различных артиллерийских снарядов снаряд, обладающий большим количеством вещества или большей массой, получает от одного и того же заряда меньшую скорость.

При выстреле из орудия одна и та же сила взрыва действует на снаряд и на орудие, толкая их в противоположные стороны. При этом снаряд, имеющий меньшую массу, приобретает огромную скорость, тогда как орудие медленно откатывается.

Для сравнения движения тел, имеющих различные массы, в механике установлено понятие о количестве движения.

Количеством движения называется произведение массы движущегося тела на скорость его движения: mv .

Когда увеличивается скорость движения тел, имеющих одинаковые массы, то происходит увеличение количества движения этих тел. Из двух тел, движущихся с одинаковой скоростью, большим количеством движения обладает тело, имеющее большую массу.

§ 2. ВТОРОЙ ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ

Изменение количества движения пропорционально движущей силе и происходит по направлению прямой, по которой действует сила.

Ньютон поясняет:

„Это количество движения..., если тело уже находилось в движении, при совпадении направлений прилагается к количеству движения, бывшему ранее, при противоположном вычитается, при наклонном направлении прилагается наклонно и соединяется с бывшими ранее движениями, сообразно величине и направлению каждого из них“.

Допустим, что гребец может сообщить лодке скорость в 3 м/сек на воде непроточного пруда. Тогда на реке, текущей со скоростью 2 м/сек, скорость той же лодки, направленной по течению, составит при том же усилии гребца $3 + 2 = 5$ м/сек; скорость лодки против течения $3 - 2 = 1$ м/сек.

Представим себе, что лодка, двигаясь равномерно, пересекает равномерно текущую реку. Если бы действовала одна только сила гребца P , то лодка переместилась бы из точки A в точку B . Если бы действовала одна сила течения Q , то лодка переместилась бы в точку C . При совместном действии этих

сил лодка на самом деле перемещается из A в D по диагонали (рис. 85).

Предположим, что скорость движения по $AB = 1$ м/сек и скорость течения по $AC = 1$ м/сек. Сделаем построение и определим по чертежу, что величина диагонали AD , т. е. скорость сложного движения, равняется 1,41 м/сек.

Отсюда следует, что скорость движения тела, участвующего в двух прямолинейных и равномерных движениях, равна по величине и направлению диагонали параллелограмма, построенного на скоростях обоих движений.

Если тело A брошено по горизонтальному направлению AD (рис. 84, a) со скоростью AB , то оно будет двигаться по инерции равномерно вперед и одновременно падать вследствие непрерывного действия силы тяжести.

По инерции тело в конце 1, 2, 3, ... секунд находилось бы в точках B, C, D и т. д., но вследствие одновременного падения тело будет в точках b, c, d и т. д. Эти последние находятся ниже соответствующих точек горизонтальной линии AD , на расстояниях,

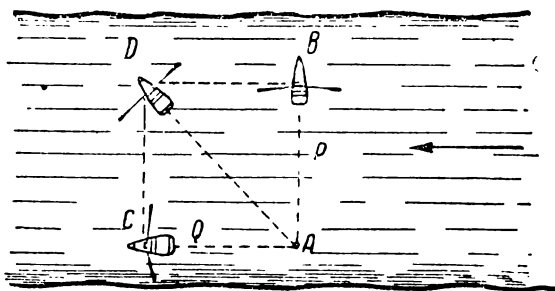


Рис. 85. Сложение двух равномерных движений.

проходимых свободно падающим телом, которые относятся между собой, как числа 1, 4, 9, ..., т. е. являются пропорциональными квадрату времени (рис. 84, a).

Кривая линия $abcd$, которая изображает путь брошенного тела, представляет собой параболу.

Если тело брошено наклонно к горизонту AM по линии AD (рис. 84, b) со скоростью AB , то путь тела $abcd$, обращенный выпуклостью вверх, также представляет собой параболу и состоит из восходящей и нисходящей частей¹.

Приведенные примеры показывают, что результат передвижения тела не зависит от того, действуют ли силы на тело совместно или же последовательно друг за другом.

§ 3. ТРЕТИЙ ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ

Третий закон динамики Ньютон высказал в такой форме: Всякому действию есть равное и противоположное противодействие, иначе говоря: взаимодействия двух тел друг на друга равны между собой и направлены в противоположные стороны.

¹ В действительности вследствие сопротивления воздуха кривая полета брошенного тела отличается от параболы.

Ньютон приводит следующие примеры:

„Если какое-нибудь тело надавливает или тянет другое тело, то оно в такой же мере испытывает от него давление или тягу.

Если мы нажимаем камень пальцем, то и палец нажимается камнем“.

Рассмотрим пример действия сил, объединяющий первый и третий законы динамики.

Представим себе тело, которое равномерно вращается по окружности, удерживаемое нитью, укрепленной в центре круга (в руке) (рис. 86).

Тогда нить должна постоянно тянуть тело к центру, так как если бы на тело не действовало натяжение нити и оно было бы свободно, то по закону инерции двигалось бы равномерно и прямолинейно. Сила натяжения нити, удерживающая тело на окружности и направленная от окружности к центру, называется центростремительной силой.

Если нить разорвется, то действие центростремительной силы прекратится, но тело по закону инерции будет продолжать свое движение по касательной к окружности равномерно и с той скоростью, которую оно имело в момент прекращения действия *б)* силы.

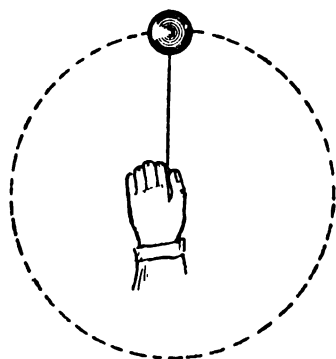


Рис. 86. Выявление центростремительной и центробежной сил.

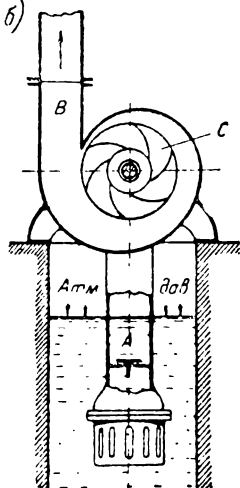
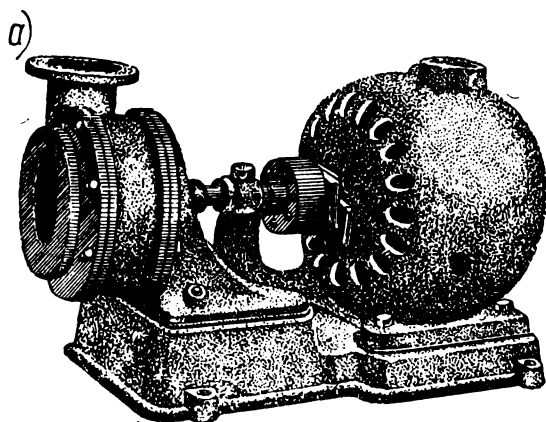


Рис. 87. Центробежный насос.

Так как нить тянет тело к центру (руке), то и тело по третьему закону действует на центр (руку) с силой, направленной от центра к окружности. Эта сила называется центробежной. Центробежная сила равна и прямо противоположна центростремительной силе.

Описанное действие сил находит широкое применение на практике.

Возьмем например центробежный насос для подачи воды (рис. 87). Он представляет собой плотный кожух, внутри которого с большой скоростью вращается диск C .

Вода поступает по трубе A , увлекается диском и приходит в быстрое круговое движение. Вследствие слабого сцепления частицы воды отлетают от диска по касательным в вертикальную трубу B , приделанную на кожухе вверху. Благодаря большой скорости движения вода поднимается по трубе на значительную высоту.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие опытные данные послужили к установлению первых двух законов?
2. Сформулируйте первый закон и приведите примеры, его выявляющие.
3. В чем выражается второй закон; приведите примеры, к нему относящиеся.
4. Дайте определение правила параллелограмма скоростей.
5. Приведите примеры движения, выявляющие третий закон движения.
6. Дайте определение центростремительной и центробежной силы.

Глава 2. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СИЛОЙ, МАССОЙ И УСКОРЕНИЕМ

§ 1. ДЕЙСТВИЕ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ НА ТЕЛО, НЕ ИМЕЮЩЕЕ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

Предположим, что сила, действующая на тело, постоянна, т. е. сохраняет свою величину и направление во все время движения тела. Определим, какое движение под действием этой силы получит тело, не имеющее начальной скорости (находящееся в покое).

Обозначим буквой a величину скорости, которую сила сообщит телу, действуя на него в течение первого промежутка времени.

В течение второго промежутка времени тело по закону инерции двигалось бы с постоянной, приобретенной скоростью a и имело бы эту скорость и в конце данного промежутка времени, если бы сила перестала действовать. Но так как в течение второго промежутка времени сила продолжает действовать, то на основании второго закона динамики следует сложить движение по инерции с движением от действия силы. При этом сложении надо взять скорость по инерции a и скорость, которую сила сообщает телу в течение второго промежутка времени, т. е. такую же скорость a . В результате получится скорость, равная $2a$.

Рассуждая точно так же о скорости в конце любого промежутка времени t , найдем, что скорость будет равна:

$$v = at.$$

Это есть уравнение равноускоренного движения (кинематика, гл. 1, § 3).

Пройденный телом путь определяется вторым уравнением:

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

Следовательно, сила, постоянная по величине и направлению, сообщает телу, не имеющему начальной скорости, прямолинейное и равноускоренное движение.

Если, несмотря на действие постоянной силы, прекращается ускорение движения, то это означает, что одновременно действуют другие силы, препятствующие движению.

Например сопротивление воздуха, возрастающее пропорционально скорости движения тела, может уравновесить действие постоянной силы, вызывающей ускорение, вследствие чего тело будет продолжать свое движение равномерно по инерции.

Сила тяги паровоза сообщает равноускоренное движение поезду, и это происходит до тех пор, пока все возрастающая сила сопротивления воздуха и другие силы не приостановят нарастание скорости. Тогда поезд будет продолжать двигаться равномерно „полным ходом“.

§ 2. ДЕЙСТВИЕ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ НА ТЕЛО, ИМЕЮЩЕЕ НАЧАЛЬНУЮ СКОРОСТЬ

Мы рассматривали действие силы на тело, не имеющее начальной скорости.

Предположим теперь, что тело имеет начальную скорость, обозначаемую v_0 , и что на него действует сила P по направлению этой скорости.

По второму закону динамики мы должны сложить скорость движения по инерции v_0 со скоростью движения от действия силы P на тело, не имеющее начальной скорости. По прошествии времени t начальная скорость будет попрежнему v_0 вследствие инерции, скорость же от действия силы P составит at . Окончательно получим:

$$v = v_0 + at.$$

Пройденный путь по инерции будет v_0t , а от действия силы $\frac{at^2}{2}$, следовательно

$$s = v_0t + \frac{at^2}{2}.$$

Если сила направлена в сторону, противоположную скорости v_0 , то из движения по инерции надо вычесть движение от действия силы. Мы получим уравнение равномерно замедленного движения:

$$v = v_0 - at;$$

$$s = v_0t - \frac{at^2}{2}.$$

На основании полученных результатов напишем уравнения равнопеременного движения в общем виде:

$$v = v_0 \pm at, \quad (1)$$

$$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \quad (2)$$

Эти уравнения объединяют все рассмотренные нами случаи равнопеременного движения.

Знаки плюс (+) или минус (—) между первым и вторым слагаемыми означают направления постоянно действующей силы в отношении начальной скорости тела. В первом случае имеем равноускоренное движение, во втором случае равнозамедленное. Если тело не имеет начальной скорости, тогда

$$v_0 = 0 \text{ и } v_0 t = 0.$$

Определим, какое расстояние пройдет до остановки тело, движущееся равнозамедленно с начальной скоростью v_0 .

Мы знаем, что $v = v_0 - at$. Тело будет двигаться до тех пор, пока его скорость v не станет равной нулю.

Если $v = 0$, то $0 = v_0 - at$, откуда $t = \frac{v_0}{a}$.

Подставив значение t в формулу (2), получим:

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2} = \frac{v_0^2}{a} - \frac{av_0^2}{2a^2},$$

$$s = \frac{v_0^2}{2a}.$$

Пример. Камень брошен вверх с начальной скоростью 49 м/сек; определить:

- а) через сколько секунд камень прекратит подъем;
- б) какое расстояние пройдет камень;
- в) сколько секунд продлится падение камня.

Решение.

а) Время подъема камня определим из формулы $v = v_0 - at$. В конце подъема скорость $v = 0$.

В течение подъема скорость замедляется под действием силы тяжести на $a = g = 9,8 \text{ м/сек}^2$.

$$0 = 49 - 9,8t; \quad t = 5 \text{ сек.}$$

б) Расстояние, пройденное камнем, определим из формулы

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2} :$$

$$s = 49 \cdot 5 - \frac{9,8 \cdot 5^2}{2} = 122,5 \text{ м.}$$

Расстояние, пройденное камнем, можно определить непосредственно по формуле $s = \frac{v_0^2}{2a}$:

$$s = \frac{49^2}{2 \cdot 9,8} = 122,5 \text{ м.}$$

в) Время падения камня узнаем из формулы $s = \frac{at^2}{2}$, как для тела, не имеющего начальной скорости; действительно, камень начнет падение в тот момент, когда подъем прекратится и скорость будет равна нулю.

Длина пути известна $s = 122,5$ м.

$$122,5 = \frac{9,8t^2}{2}; \quad t = 5 \text{ сек.}$$

Время подъема и время падения равны между собой.

§ 3. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Допустим, что тело, имеющее массу m , равномерно изменит скорость от v до v_1 под действием постоянной силы p в течение t секунд. Тогда количество движения изменится на $\frac{mv_1 - mv}{t}$. По второму закону динамики это изменение пропорционально действующей силе p :

$$\frac{mv_1 - mv}{t} = p. \quad (1)$$

Разделив обе части равенства (1) на m , получаем:

$$\frac{v_1 - v}{t} = \frac{p}{m}. \quad (2)$$

Так как $\frac{v_1 - v}{t}$ есть изменение скорости за единицу времени, т. е. ускорение a , то можно равенство (2) написать в следующем виде:

$$a = \frac{p}{m}. \quad (3)$$

Ускорение, сообщаемое силой телу, прямо пропорционально данной силе и обратно пропорционально массе тела.

Решая равенство (3) относительно p , получаем:

$$p = ma. \quad (4)$$

Сила определяется произведением массы тела на ускорение его движения.

Выражение (4), определяющее зависимость между силой, ускорением и массой, называется основным уравнением динамики и представляет собой математическую формулировку второго закона динамики.

Из равенства (3) находим значение m :

$$m = \frac{p}{a}. \quad (5)$$

Масса тела определяется отношением силы к ускорению.

Масса данного тела постоянна, следовательно отношение силы к ускорению представляет собой для данного тела по-

стоянную величину. Поэтому величина m является механической характеристикой массы, мерой ее инерции.

Определим по формуле (4) вес тела или силу тяжести, действующую на тело и заставляющую ее падать.

Ускорение падающих тел в одном и том же месте земной поверхности одинаково и равно g .

Обозначим массы двух тел m_1 и m_2 .

Тогда веса их Q_1 и Q_2 соответственно равны:

$$Q_1 = m_1 g \text{ и } Q_2 = m_2 g.$$

Разделив оба равенства почленно, получим:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{m_1}{m_2},$$

т. е. массы тел пропорциональны их весам.

Пропорциональность массы и веса дает возможность сравнивать различные массы между собой, измеряя их вес.

Если (в одном и том же месте измерения) вес одного тела больше другого в n раз, значит, и масса его в n раз больше.

Масса тела измеряется единицами массы. Условившись в единицах силы и в единицах ускорения, мы должны принять определенные единицы массы, используя формулу (5).

В механической системе мер единицей силы служит 1 кг, единицей времени 1 сек., единицей расстояния 1 м и единицей ускорения 1 м/сек².

Положим, что в формуле (5) $p = 1$ кг и $a = 1$ м/сек², тогда

$$m = \frac{p}{a} = \frac{1 \text{ кг}}{1 \text{ м/сек}^2} = \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}}.$$

Таким образом механической единицей массы является масса тела, которое от действия силы в 1 кг получает ускорение, равное 1 м/сек².

Посмотрим, какому весу соответствует эта единица массы. Допустим, что тело весит Q кг. Для определения его массы подействуем на него силой притяжения земли, т. е. предоставим ему возможность свободно падать. Сила притяжения земли и есть сила Q , приложенная в центре тяжести рассматриваемого тела. От этой силы тело будет двигаться с ускорением 9,8 м/сек². Подставляя рассматриваемые величины в формулу (5), имеем:

$$m = \frac{Q}{9,8 \text{ м/сек}^2}.$$

Значит, для того чтобы определить число механических единиц массы в данном теле, надо его вес в килограммах разделить на 9,8.

Если тело имеет вес 9,8 кг, то его масса равняется единице, так как

$$m = \frac{9,8}{9,8} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}}.$$

Следовательно механическая единица массы весит 9,8 кг.

Пример 1. Какая требуется сила, чтобы сообщить вагонетке весом в 980 кг ускорение в 1 м/сек².

Решение. Необходимую силу определим по формуле (4) $p = ma$. Величина ускорения a задана; остается вычислить массу m вагонетки:

$$m = \frac{Q}{g} = \frac{980}{9,8} = 100 \text{ (единиц)}.$$

Подставляя величины a и m в формулу (4), находим величину силы p :

$$p = 100 \cdot 1 = 100 \text{ кг}.$$

Пример 2. Вагонетка весом 1960 кг движется со скоростью 5 м/сек. Определить силу торможения, необходимую для того, чтобы остановить вагонетку в течение 10 сек.

Решение. Необходимую силу определим по формуле:

$$P = ma.$$

Предварительно узнаем массу вагонетки:

$$m = \frac{Q}{g} = \frac{1960}{9,8} = 200 \text{ (единиц)}.$$

Замедление движения считаем равномерным и определяем его по формуле $v = v_0 - at$.

При остановке вагонетки скорость $v = 0$;

$$0 = 5 - a \cdot 10;$$

откуда

$$a = \frac{10}{5} = 2 \text{ м/сек}^2.$$

Теперь имеются все данные для определения силы торможения:

$$P = 200 \cdot 2 = 400 \text{ кг}.$$

§ 4. СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ

Группа основных единиц измерения, принятых в механике, носит название системы метр — килограмм (сила) — секунда и сокращенно обозначается начальными латинскими буквами наименований единиц — MKS.

Существует другая система единиц сантиметр — грамм — секунда (сокращенно — CGS).

Рассмотрим подробнее единицы этих систем.

а) В системы входит общая единица измерения времени — секунда.

Секунда есть одна восемьдесят шесть тысяч четырехсотая ($1/86400$) часть средних солнечных суток, т. е. периода вращения земли вокруг своей оси, определенного между двумя полуденными стояниями солнца.

Так как продолжительность солнечных суток в разные времена года несколько различна, то в практику введены средние солнечные сутки, продолжительность которых равна средней длительности суток за весь год.

Подразделения суток на часы, минуты и секунды древнего происхождения и связываются с подразделением круга на градусы, основатели этого измерения времени — вавилоняне — исходили из „шагов солнца“.

„Шагом“ называли кажущееся перемещение солнца по кругу на расстояние, равное двум диаметрам солнца. За день насчитывали примерно 180 „шагов“. Таким образом подразделили полуокружность на 180 градусов, или окружность на 360 градусов, и отмечали 360-е доли суток. Впоследствии другие народы делили сутки на меньшее число частей, все же связанное с числом 360, например 12, 18, 24 и т. д. Наиболее устойчивым оказалось деление суток на 24 часа (вернее — день на 12 час. и ночь на 12 час.).

а) В системы входят единицы длины: метр и сантиметр ($1/100$ м).

Международным образцом метра признана платино-иридиевая мера, которая хранится в Международном бюро мер и весов в г. Севре (Франция).

В СССР за образец метра принята платино-иридиевая копия международного метра, которая хранится во Всесоюзном институте метрологии в Ленинграде.

Единица длины метр и связанные с ним другие меры были установлены во Франции после революции 1789 г. взамен многочисленных запутанных старых мер, служивших одним из средств эксплуатации народа.

Передовыми учеными была выдвинута идея о создании единых мер, неизменных и естественных подобно мерам времени и простых в обращении.

В качестве новой меры длины была принята одна сорокамиллионная часть длины Парижского меридиана. Для этой цели измерили часть меридиана между городами Дюнкерком и Барселоней. Единица длины получила оформление в виде платинового стержня.

Впоследствии выяснилась недостаточная точность проведенных измерений; учитывая однако, что техника измерений все совершенствуется, решили не пересматривать величину метра. На Международной комиссии 1889 г. приняли за международный образец метра изготовленный из платино-иридиевого сплава стержень, который при 0°C дает между осями своих двух штрихов расстояние, равное длине первоначального метра.

в) Одновременно с единицей длины была установлена единица массы — килограмм — в качестве массы одного кубического дециметра воды при температуре наибольшей ее плотности ($+4^{\circ}\text{C}$).

Была изготовлена соответствующая гиря, а затем ее точная копия; последняя служит международным образцом и хранится в Международном бюро мер и весов.

В СССР за образец килограмма — массы принята платино-иридиевая копия международного килограмма, которая хранится во Всесоюзном институте метрологии.

Основное различие между системами *CGS* и *MKS* заключается в следующем.

Система *CGS* содержит в числе основных единиц единицу массы — грамм, равный $1/1000$ массы килограмма.

Отсюда производной единицей силы в системе *CGS* является

так называемая дина — сила, сообщающая массе в 1 г ускорение в 1 см/сек^2 .

Система *MKS* содержит в числе трех основных единиц единицу силы, которой служит вес 1 кг массы. Отсюда производной единицей массы в системе *MKS* является масса тела весом в 9,8 кг (см. § 3).

Мы уже знаем, что весом тела называют действие на тело силы притяжения земли (силы тяжести). Эта сила не везде одинакова. На полюсах она меньше, чем на экваторе; разница составляет около $1/2\%$. Сила тяжести уменьшается также в зависимости от высоты местности над уровнем моря. Ясно, что изменяется и единица силы — килограмм. При решении многих практических вопросов этим изменением пренебрегают; в точных измерениях его учитывают.

Допустим, что мы измерили вес мешка с цементом с помощью пружинных весов у подножия горы, тогда, взойдя на гору, придется досыпать цемента в мешок, чтобы произвести одно и то же растяжение пружины весов.

Если мы возьмем рычажные весы, то результат измерений не будет зависеть от того места земной поверхности, где мы производим измерение. Таким образом на рычажных весах определяется масса тела путем сравнения ее с массой гири.

Глава 3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

§ 1. РАБОТА

Когда сила перемещает тело, она производит работу. В простейшем случае, когда тело перемещается по направлению силы, работа определяется произведением силы на пройденный телом путь. Обозначим величину работы буквой T , пройденный путь — через s , а силу — через P , тогда получим следующую формулу:

$$T = Ps.$$

Рассмотрим некоторые случаи работы.

Когда никакого внешнего сопротивления движению нет и на тело непрерывно действует сила P , тогда тело получает ускорение. В этом случае работа силы преодолевает инерцию тела.

Предположим теперь, что при перемещении тела непрерывно действующая сила встречает сопротивление, равное ей по величине, противоположное по направлению. Тогда работа силы будет расходоваться на преодоление сопротивления, а тело будет продолжать двигаться по инерции равномерно со скоростью v . Если бы не было силы P , то тело под влиянием сопротивления остановилось бы. Следовательно работа силы P , перемещающей тело с постоянной скоростью, поддерживает неизменную скорость движения тела.

Если сила сопротивления движению P_1 меньше приложенной силы P , то величина силы, сообщающей ускорение, будет равна $P_2 = P - P_1$.

Часть работы здесь идет на преодоление сопротивления, часть — на сообщение ускорения.

Например при отправлении поезда со станции работа силы тяги расходуется частично на преодоление трения, частично — на сообщение поезду ускорения.

Направление силы, противоположное направлению движения тела, имеет место при остановке поезда вследствие трения. Сила трения направлена противоположно перемещению, и работа этой силы отрицательна.

За единицу работы в механике принимают работу, совершенную силой в 1 кг на пути в 1 м.

Эта величина работы называется килограммометром.

В системе CGS единицей работы служит эрг¹.

Эрг есть работа, произведенная силой в 1 дин на расстоянии в 1 см. Так как эта величина очень мала, то чаще употребляется другая единица — джоуль² = 10 000 000 эрг.

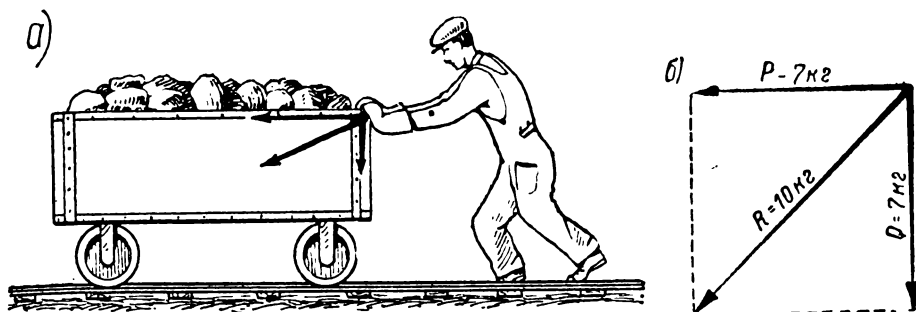


Рис. 88. Передвижение вагонетки:
а — общий вид; б — разложение силы.

Определим соотношение между килограммометром и джоулем. $1 \text{ кгм} = 1 \text{ кг} \times 1 \text{ м} = 981 \text{ 000 дин} \times 100 \text{ см} = 98 \text{ 100 000 эрг} = 9,81 \text{ джоуля}$.

В механике работа рассматривается как достигнутый результат без учета времени.

Допустим, требуется перенести 1 000 кг цемента на высоту 5 м. Работа составит $1 \text{ 000 кг} \times 5 \text{ м} = 5 \text{ 000 кгм}$. Количество работы не изменится, если перенести цемент в один прием или по частям.

Когда сила образует некоторый угол с направлением движения, то для определения ее работы надо разложить ее на две составляющие силы так, чтобы одна из них была направлена по линии движения, а другая перпендикулярно к этой линии. Затем следует взять только работу первой силы, так как перпендикулярная сила, не участвуя в движении, не производит работы.

Пример 1. Вагонетка прошла путь 500 м; сила тяги — 20 кг. Определить произведенную работу.

Решение. Направления силы и движения совпадают.

Определяем работу по формуле:

$$T = ps = 20 \text{ кг} \times 500 \text{ м} = 10 \text{ 000 кгм}.$$

¹ Эрг — от греческого слова „эргон“ — работа.

² Название по фамилии физика Джоуля.

Пример 2 Подъемный кран поднял груз в 1500 кг на высоту 10 м. Определить работу крана.

Решение. $T = ps = 1500 \text{ кг} \times 10 \text{ м} = 15000 \text{ кгм}$.

Пример 3. Вагонетка перемещается вручную на расстояние в 50 м, причем сила $R = 10 \text{ кг}$ прилагается под углом в 45° (рис. 88,а). Определить произведенную работу.

Решение. Разложим силу R на две составляющие: силу P , направленную горизонтально по линии движения вагонетки, и силу Q , направленную перпендикулярно к силе P (в данном случае вертикально) (рис. 88,б).

Первая из этих составляющих дает величину силы, движущей вагонетку, вторая — величину силы, прижимающей ее к земле.

Сила P производит работу, сила Q работы не производит. Величину силы P определим по масштабу; получим с округлением 7 кг.

Теперь определим произведенную работу:

$$T = 7 \text{ кг} \times 50 \text{ м} = 350 \text{ кгм}.$$

§ 2. МОЩНОСТЬ

Мы видели, что время не является элементом механической работы. Например в известных условиях легковая лошадь произведет такую же работу, как и ломовая, с той лишь разницей, что для первой понадобится больше времени, чем для второй. Но ломовая лошадь в одно и то же время может приложить большую силу на данном расстоянии, чем легковая, поэтому в единицу времени работа ее будет больше. Ломовая лошадь обладает большей мощностью, т. е. возможностью производить данную работу скорее.

Мощность выражает количество работы, совершенное в единицу времени:

Мощность обозначается буквой N .

Единицу мощности получим, разделив единицу работы на единицу времени:

$$N = \frac{1 \text{ кгм}}{1 \text{ сек.}} = 1 \text{ кгм/сек.}$$

В механике единицей мощности служит так называемая лошадиная сила.

Знаменитый английский механик Джемс Уатт произвел испытание очень сильной лошади, которая поднимала на веревке, перекинутой через блок, груз около 68 кг со скоростью 4 км в 1 час. Это составит работу $68 \text{ кг} \times 4000 \text{ м} = 272000 \text{ кгм}$ в 1 час, или в 1 сек. $272000 : 3600 = 75 \text{ кгм}$.

Полученную величину приняли в механике за единицу мощности.

Следовательно единица мощности — „лошадиная сила“ — равняется 75 кгм/сек .

Для выражения мощности какого-нибудь двигателя в лошадиных силах определяют работу в кгм, произведенную им в сек., и делят на 75.

Пример 1. Вал машины A диаметром 10 см делает 240 оборотов в 1 мин. и поднимает груз $Q=100$ кг (рис. 89). Определить мощность машины в лошадиных силах.

Решение. Пройденный грузом путь подъема при одном обороте вала $\pi d = 3,14 \cdot 10 = 31,4$ см. Так как вал делает в 1 сек. $240 : 60 = 4$ оборота, то работа в 1 сек., или мощность, составит $4 \cdot 3,14 \cdot 100 = 12560$ кгсм $= 125,6$ кгм.

Мощность машины N в лошадиных силах:

$$N = 125,6 : 75 = 1,66 \text{ л. с.}$$

Пример 2. Насос подал 50000 л воды в течение 5 мин. на высоту 6 м. Определить потребную мощность двигателя для насоса.

Решение. а) Определяем работу, проделанную насосом:

$$50000 \text{ кг} \times 6 \text{ м} = 300000 \text{ кгм.}$$

б) Определяем работу, проделанную в 1 сек.

$$300000 \text{ кгм} : 300 \text{ сек.} = 1000 \text{ кгм/сек.}$$

в) Определяем мощность в лошадиных силах:

$$\frac{1000 \text{ кгм/сек}}{75 \text{ кгм/сек}} = 13 \text{ л. с.}$$

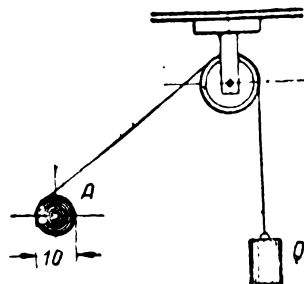


Рис. 89. Определение работы машины посредством подъема груза.

В практических условиях мощность лошади ниже величины определенной Уаттом. Например лошадь везет груз в 1200 кг по ровному участку шоссе со средней скоростью 1 м/сек. Сила тяги равна $\frac{1}{20}$ от перевозимого груза, т. е. $1200 : 20 = 60$ кг. Производимая работа в 1 сек., или мощность, составит 60 кгм/сек, т. е. 80% от мощности, исчисленной Уаттом.

Заметим, что наименование „лошадиная сила“ неправильно, так как в механике сила измеряется в килограммах, а „лошадиная сила“ в кгм/сек и является не силой, а мощностью.

Лошадиная сила не соответствует метрической системе измерения, в которой все производные единицы являются кратными 10 .

Однако измерение мощности в лошадиных силах еще применяется в двигателях паровых и внутреннего сгорания и часто служит для наглядного сопоставления мощности машины с мощностью лошади.

В системе CGS малой единицей мощности служит эрг в 1 сек. Это очень малая величина, и для практических целей обыкновенно пользуются джоулем в 1 сек. ($= 10000000$ эрг в 1 сек.). Последняя единица называется ватт (уатт) в честь Джемса Уатта; 1000 ватт составит 1 киловатт.

Одна лошадиная сила равна 75 кгм/сек $= 75 \cdot 9,81$ джоуль/сек $= 786$ ватт $= 0,736$ киловатт, или округляя, $\frac{3}{4}$ киловатт.

Киловатт равен с округлением $\frac{4}{3}$ лошадиной силы.

В гидротехнике и электротехнике мощность измеряется в киловаттах.

§ 3. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Энергией¹ тела называется его способность производить работу. Поэтому энергия измеряется теми же единицами, как работа (килограммометр, эрг и джоуль).

Кинетической энергией обладает всякое тело, находящееся в движении, каково бы это движение ни было: поступательное или вращательное. Таким образом кинетическая энергия является энергией движения².

Для того чтобы измерить кинетическую энергию движущегося тела, вычислим работу, которую произведет это тело до остановки.

Предположим, что на тело массы m , движущееся со скоростью v , действует постоянная сила сопротивления P навстречу движению до тех пор, пока тело не остановится. Пусть от начала действия силы P до остановки тело прошло путь s . Движение тела было равномерно замедленное. Работа преодоления сопротивления:

$$T = Ps.$$

Сила P равна произведению массы m на ускорение a :

$$P = ma.$$

Путь s , пройденный телом:

$$s = \frac{v^2}{2a}.$$

Подставляя значение P и s в формулу работы, получаем:

$$Ps = \frac{mav^2}{2a} = \frac{1}{2} mv^2.$$

Выражение $\frac{1}{2} mv^2$ и определяет величину кинетической энергии. Следовательно величина кинетической энергии тела выражается произведением массы тела на половину квадрата его скорости. Обозначим эту величину буквой K ; получим:

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

Выясним на конкретном примере зависимость между произведенной работой и приобретенной кинетической энергией.

Пусть вагонетка весом $Q = 460$ кг начала двигаться с ускорением в 1 м/сек² под действием постоянной силы $P = 50$ кг.

1) Вычислим работу, сделанную телом в течение 1-й сек. В начале движения скорость $v_0 = 0$, а в конце 1-й сек. скорость $v_1 = 1$ м/сек, и пройденный за 1-ю сек. путь будет $s = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

¹ Энергия — греческое слово, означающее деятельность.

² Слово „кинетическая“ происходит от греческого слова „кинетикос“, что значит: относящийся к движению.

Этот же результат мы получаем непосредственно по формуле равноускоренного движения:

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{1 \cdot 1^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Проделанная работа составит:

$$T = Ps = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25 \text{ кгм.}$$

Теперь вычислим кинетическую энергию тела в конце 1-й сек. движения.

Масса тела $m = \frac{460}{9,8} = 50$ (тех. ед.); скорость в конце 1-й сек. $v_1 = 1$ м/сек.

Кинетическая энергия:

$$K = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{50 \cdot 1^2}{2} = 25 \text{ кгм.}$$

2) Вычислим работу, сделанную в течение 2 сек. Пройденный путь:

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{1 \cdot 2^2}{2} = 2 \text{ м.}$$

Проделанная работа $T = Ps = 50 \cdot 2 = 100$ кгм.

Вычислим кинетическую энергию тела в конце 2-й сек.:

$$K = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{50 \cdot 2^2}{2} = 100 \text{ кгм.}$$

На основании полученных результатов приходим к следующему выводу.

Если сила привела в движение покоящееся тело, то работа, произведенная силой на протяжении некоторого пути, равна кинетической энергии, накопленной телом в конце этого пути.

За 2-ю сек. вагонетка прошла $2 - 0,5 = 1,5$ м. Проделанная работа на этом участке $Ps = 50 \cdot 1,5 = 75$ кгм. Кинетическая энергия также возросла, а именно:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = 100 - 25 = 75 \text{ кгм.}$$

Следовательно работа силы на некотором промежутке пути тела равна приращению кинетической энергии, полученному телом на протяжении этого промежутка:

$$Ps = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Это и есть соотношение между кинетической энергией и работой.

Если нет препятствий для движения, то могут быть два случая;

1) кинетическая энергия движущегося тела остается по величине постоянной; например прямолинейное и равномерное движение тела по инерции;

2) кинетическая энергия возрастает; например равноускоренное движение тела под влиянием непрерывно действующей силы.

Если встречаются препятствия движению тела, то они преодолеваются и скорость движущегося тела уменьшается; иначе говоря, совершается механическая работа. При этом уменьшается кинетическая энергия движущегося тела.

Поезд в движении обладает кинетической энергией, измеряемой произведением его массы на половину квадрата его скорости. Если прекратить действие пара, то энергия поезда постепенно тратится на преодоление сопротивлений движению, и поезд наконец останавливается.

§ 4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Допустим, что баба свайного копра весом в 100 кг поднята на высоту $h = 4$ м.

Для поднятия бабы произведена работа:

$$Ph = 100 \cdot 4 = 400 \text{ кгм.}$$

В своем новом положении свайная баба является возможным источником работы. Эту работу произведет сила тяжести (вес бабы), если баба начнет падать.

Таким образом баба обладает энергией благодаря своему положению относительно других тел, иначе говоря, потенциальной энергией¹.

Потенциальная энергия поднятого тела измеряется количеством работы, необходимой для поднятия этого тела.

§ 5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим тело, брошенное вверх. В начале своего подъема тело обладает одной кинетической энергией, измеряемой величиной $\frac{mv^2}{2}$. По мере поднятия скорость тела и следовательно кинетическая энергия уменьшаются, расходуясь на преодоление силы тяжести, а потенциальная энергия возрастает.

Когда скорость будет равна нулю, тогда кинетическая энергия полностью перейдет в потенциальную.

В этот момент тело обладает только потенциальной энергией, величина которой Ph численно равна первоначальной кинетической энергии $\frac{mv^2}{2}$.

По мере падения тела потенциальная энергия уменьшается а кинетическая с возрастанием скорости увеличивается, и наибольшую величину, равную начальной, она получит при достижении телом земли.

¹ „Потенциальная“ — от греческого слова „потенция“ — означающее: возможность, способность.

В любой момент подъема и падения тела сумма кинетической и потенциальной энергии постоянна.

Пример. Тело весом 9,8 кг брошено вверх с начальной скоростью 49 м/сек. Определить сумму величин кинетической и потенциальной энергии: а) в начале подъема; б) в конце подъема; в) в любом промежутке подъема или падения.

Решение. а) Начальная кинетическая энергия тела составит:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1 \cdot 49^2}{2} = 1\,200,5 \text{ кгм.}$$

В этот момент потенциальная энергия равна нулю, так как $h=0$. В сумме имеем $1\,200,5 + 0 = 1\,200,5 \text{ кгм.}$

б) Тело поднимется на высоту 122,5 м (см. пример гл. 2, § 2).

Наибольшая величина потенциальной энергии составит $P_h = 9,8 \cdot 122,5 = 1\,200,5 \text{ кгм.}$

В этот момент кинетическая энергия равна нулю, так как $v=0$. В сумме получим $1\,200,5 + 0 = 1\,200,5 \text{ кгм.}$

в) Определим сумму видов энергии, например в конце 1-й сек. падения. В этот момент тело пройдет 4,9 м. До земли останется $122,5 - 4,9 = 117,6 \text{ м.}$

Величина потенциальной энергии будет:

$$P_h = 117,6 \cdot 9,8 = 1\,152,48 \text{ кгм.}$$

Величина кинетической энергии будет:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1 \cdot 9,8^2}{2} = 48,02 \text{ кгм.}$$

$$\text{Сумма } 1\,200,5 \text{ кгм.}$$

Постоянная величина суммы двух видов энергии — кинетической и потенциальной — выражает закон сохранения энергии для рассматриваемого явления.

Многочисленными опытами установлено, что при переходе одного вида энергии в другой количество энергии не уменьшается и не увеличивается, а сохраняется постоянным.

Это положение применимо не только к механическим, но и ко всем физическим и химическим явлениям.

Закон сохранения энергии формулируется так:

Количество всей находящейся в замкнутой системе энергии при всех изменениях остается постоянным.

Замкнутой системой называется такая совокупность тел, которая не отдает энергии окружающим телам и не получает ее от них.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение механической работы.
2. Назовите единицы работы. В чем их различие?
3. Дайте определение мощности.
4. Назовите единицы мощности. В чем их различие?
5. Что называется энергией тела?
6. Дайте определение кинетической энергии.
7. Какова зависимость между произведенной работой и кинетической энергией тела?
8. Дайте определение потенциальной энергии.
9. В чем выражается закон сохранения энергии?

Глава 4. ПЕРЕДАЧА РАБОТЫ В МАШИНЕ

Машина служит для передачи работы от двигателя к обрабатываемому или передвигаемому телу.

В древности известны были очень немногие машины, служившие для перемещения грузов. Римский архитектор Витрувий, живший в I веке, писал: „Машина—это сооружение из дерева для подъема тяжестей“. Для указанных целей применялись рычаги, наклонные плоскости, блоки и ворота.

Эти машины, названные простыми, применяются в своем первоначальном виде и в настоящее время, но кроме того они входят составными элементами в более сложные машины.

Простые машины делятся на 6 групп сообразно их рабочему принципу: рычаг, блок, ворот, наклонная плоскость, винт и клин. Как мы увидим далее, блок и ворот представляют собой видоизменение рычага, а винт и клин—видоизменение наклонной плоскости.

Прежде чем перейти к описанию работы отдельных простых машин, рассмотрим общие принципы, относящиеся ко всем машинам.

§ 1. „ЗОЛОТОЕ ПРАВИЛО“

Пусть к неравноплечему рычагу AB (рис. 90) приложены грузы (силы) $P=20\text{ кг}$ и $Q=100\text{ кг}$, которые друг друга уравнивают вследствие того, что расстояния их от точки опоры C обратно пропорциональны величинам грузов, т. е.:

$$\frac{Q}{P} = \frac{AC}{CB}.$$

Если мы сообщим рычагу толчок по направлению силы P , то рычаг начнет равномерно вращаться.

Представим себе, что рычаг передвинулся в положение, показанное на рис. 90 пунктиром.

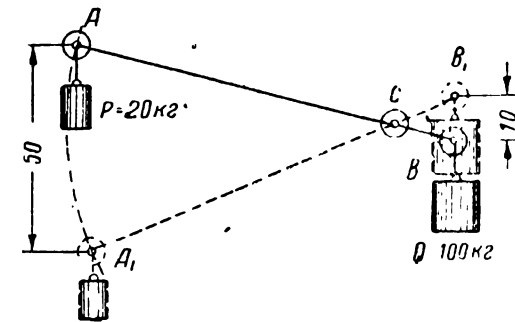


Рис. 90. Работа рычага.

При этом груз P опустился на 50 см, груз Q поднялся на 10 см. Работа, проделанная грузом P , составит $20 \cdot 50 = 1000\text{ кгм}$. Работа, проделанная грузом Q , составит также $100 \cdot 10 = 1000\text{ кгм}$.

Груз P есть двигающая сила, или короче—двигатель; груз Q есть сила, оказывающая сопротивление перемещению рычага, или короче—сопротивление. Поэтому можно сказать:

При равномерном движении машины работа двигателя равна работе сопротивления.

Это положение справедливо для всех машин; оно выражает частный случай закона сохранения энергии.

Движение грузов P и Q происходило одновременно; следовательно скорость груза P в 5 раз превышает скорость груза Q , так как в одно и то же время груз P переместился на 50 см, а груз Q — на 10 см.

Обозначим буквой v скорость движения груза P ; скорость движения груза Q — буквой u .

Тогда

$$\frac{P}{Q} = \frac{u}{v},$$

т. е. скорости точек приложения силы двигателя P и силы сопротивления Q по величине обратно пропорциональны этим силам.

Таким образом малая сила двигателя преодолела большое сопротивление, двигая точку своего приложения со скоростью, большей, чем скорость точки приложения силы сопротивления.

В этом и состоит „золотое правило“ механики.

Галилей формулировал его следующим образом: „Сколько выигрывается в силе, столько теряется в скорости“.

§ 2. КОЭФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ МАШИН

Работа двигателя, передаваемая машиной, расходуется на преодоление полезных и вредных сопротивлений.

Работой, расходуемой на преодоление полезного сопротивления, или короче — работой полезного сопротивления, называется работа, для осуществления которой машина предназначена, например подъем груза.

Работа вредного сопротивления состоит главным образом в преодолении трения между частями машины и сопротивления воздуха или воды.

В результате работа двигателя равна сумме работ двух сопротивлений — полезного и вредного.

Таким образом на практике работа двигателя всегда должна быть больше работы полезного сопротивления, так как часть работы двигателя уходит на преодоление вредных сопротивлений.

Отношение величины полезной работы к величине работы двигателя называется коэффициентом полезного действия.

Этот коэффициент всегда меньше единицы. Машина является тем более совершенной, чем менее в ней вредных сопротивлений, т. е. чем выше коэффициент ее полезного действия.

Пример 1. Трение в зубчатых передачах механической лебедки подъемного крана поглощает 16% мощности двигателя; трение в барабане и прочих частях поглощает 12%. Определить коэффициент полезного действия.

Решение. Обозначим работу двигателя лебедки через T . Зубчатые передачи поглощают 16% этого количества и на барабан передается 0,84 T . В барабане и прочих частях расходуется еще 12%. Для подъема груза остается:

$$0,88 \cdot 0,84 T = 0,74 T.$$

Коэффициент полезного действия лебедки составит $K = 0,74$.

Пример 2. Грузоподъемность крана — 1750 кг. Скорость подъема — 0,35 м/сек, коэффициент полезного действия лебедки $K=0,74$. Определить мощность двигателя N .

Решение. Работа, расходуемая в 1 сек. на полезное сопротивление (подъем груза), или мощность двигателя:

$$N = 1750 \cdot 0,35 = 610 \text{ кгм/сек.}$$

Необходимая мощность двигателя с учетом коэффициента полезного действия лебедки:

$$610 : 0,74 = 825 \text{ кгм/сек.}$$

Мощность двигателя в лошадиных силах:

$$825 \text{ кгм/сек} : 75 \text{ кгм/сек} = 11 \text{ (л. с.)}$$

§ 3. ТРЕНИЕ

Основной причиной, вызывающей работу вредного сопротивления, является трение, которое никогда не удастся устранить полностью.

Трением называется сопротивление, возникающее при движении одного тела по другому вследствие неровности поверхностей соприкасающихся тел.

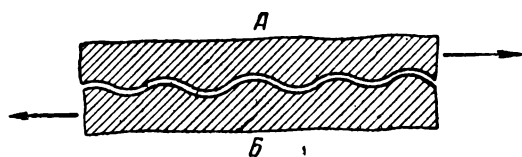


Рис. 91. Трение поверхностей.

Чем ровнее поверхности, тем меньше трение между ними; однако на любой гладкой поверхности с помощью увеличительного стекла можно обнаружить неровности в виде выступов и впадин. Рассмотрим две поверхности; их неровности изображены на рис. 91 в увеличенном виде. При движении этих поверхностей происходят зацепления и поднятия, на преодоление которых затрачивается работа.

Трение имеет громадное значение в технике. Оно является во многих случаях вредным фактором, с которым необходимо бороться, но очень часто силу трения используют для практических целей.

Из полезных применений силы трения укажем на различные тормозы. Другое применение трения имеет место в движении поездов. Паровоз двигается сам и двигает за собой поезд вследствие трения своих колес о рельсы; если колеса паровоза скользят на месте по мокрым рельсам (буксуют), тогда увеличивают трение, подсыпая под колеса мелкий песок. Описанная в кинематике фрикционная передача работает вследствие трения между шкивами; ременная передача действует по той же причине.

Различают трение при скольжении и трение при катании. Первое происходит во время скольжения тел, например при движении саней, движении поршня в цилиндре и т. д.

Второе происходит во время катания тел, например при движении колес паровоза по рельсам, колес автомобиля по дороге и т. д.

Трение при скольжении (трение первого рода)

Пусть груз Q лежит на площадке (рис. 92); если мы хотим посредством веревки передвинуть его, мы должны приложить к веревке определенную силу P .

Допустим, что груз $Q = 15 \text{ кг}$ начинает равномерно двигаться, когда сила $P = 3 \text{ кг}$; отношение силы и груза

$$\frac{P}{Q} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Это отношение называется коэффициентом трения и обозначается буквой f . Коэффициент трения сохраняет приблизительно одну и ту же величину для данных поверхностей при различных нагрузках.

В нашем примере коэффициент трения $f = \frac{P}{Q} = \frac{1}{5}$. Из равенства $f = \frac{P}{Q}$ получим величину P :

$$P = f \cdot Q.$$

Таким образом коэффициент трения представляет собой отвлеченное число, на которое надо умножить давление Q , чтобы получить силу P , преодолевающую трение.

На основании третьего закона динамики заключаем, что сила трения F равна и противоположна силе P :

$$F = P = f \cdot Q.$$

Из многочисленных опытов определена величина коэффициента трения для различных материалов и поверхностей.

Так например, для дерева, передвигаемого по дереву без смазки, коэффициент трения $f = 0,3$.

Для металла, движущегося без смазки по металлу, коэффициент трения $f = 0,18$.

Частям машин не дают перемещаться друг по другу без смазки. Смазка считается совершенной, если при ней поверхности металлических частей не соприкасаются непосредственно друг с другом, а скользят по масляной прослойке. Трение при этом значительно уменьшается и коэффициент трения составляет $f = 0,07$.

Работа трения в машине расходуется на нагревание подшипников и других частей. Когда подшипник чрезмерно нагревается, масло становится слишком жидким, выжимается из пространства между шейкой вала и вкладышами подшипника; происходит соприкосновение металлических частей. Трение вследствие этого значительно возрастает, трущиеся поверхности начинают „заедать“ и быстро изнашиваются.

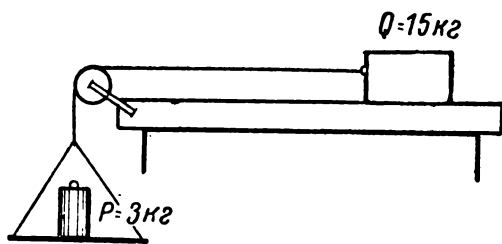


Рис. 92. Определение коэффициента трения.

Пример. Груз в 200 кг передвигают по горизонтальному деревянному настилу; соприкасающаяся с настилом поверхность груза тоже деревянная. Определить силу, необходимую для передвижения груза.

Решение.

$$P = 0,30 \cdot 200 = 60 \text{ кг.}$$

Трение при катании (трение второго рода)

Для уменьшения трения желательно скольжение заменять катанием, подобно тому как это происходит при передвижении грузов на катках (рис. 93,а).

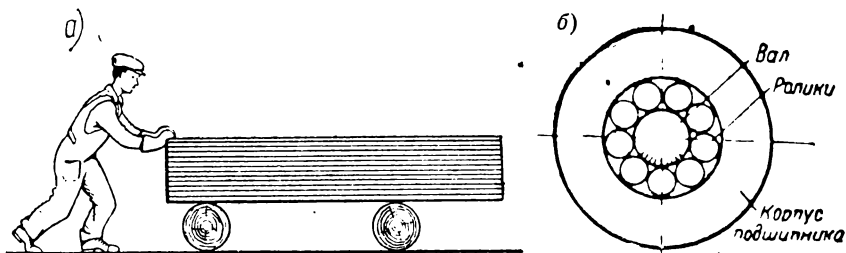


Рис. 93. Замена трения скольжения трением катания:
а — передвижение груза на катках; б — роликовые подшипники.

По этому принципу осуществили конструкцию роликовых подшипников (рис. 93,б).

Вал вращается на роликах в неподвижном корпусе подшипника. На рисунке заштрихованы те ролики, которые в данный момент несут вал. Когда вал вращается, то ролики последовательно проходят под ним.

Сказанное относится и к шариковым подшипникам, которые встречаются чаще, чем роликовые. Если шарики, а также поверхности, на которых они катятся, очень тщательно изготовлены, то сопротивление может быть доведено до $\frac{1}{50}$ величины трения, происходившего в обыкновенном подшипнике.

Таким образом при помощи шариковых подшипников можно значительно повысить коэффициент полезного действия машины за счет уменьшения потерь на трение.

Перпетуум мобиле

Устранить полностью трение и другие вредные сопротивления в машине нельзя; поэтому нельзя построить такую машину, которая, получив движение (толчок), продолжала двигаться вечно без действия внешней силы.

Однако с давних времен многочисленные изобретатели пытались создать подобную машину. Предполагалось, что, пущенная в ход, эта машина никогда не остановится и еще будет производить полезную работу, например молоть зерно или поднимать воду. Эту воображаемую машину называли по-латыни „перпетуум мобиле“, т. е. „вечное движение“.

Для великих основателей механики была ясна ошибочность „перпетуум мобиле“. Так например, Галилей считал аксиомой невозможность построения такой машины.

История исканий перпетуум мобиле интересна тем, что она тесно сопрягается с историей установления основных законов механики.

Мы не находим в классической древности попыток придумать перпетуум мобиле. Одно из первых упоминаний о нем, а именно предложение с помощью магнитов создать перпетуум мобиле относится к XIII столетию.

Последующие века и в особенности XVII и XVIII столетия изобилуют различными изобретениями, которые выдавались за перпетуум мобиле.

Изобретения эти редко приводились в исполнение; обычно все кончалось на бумаге; составлялся рисунок машины или одно описание ее.

Несколько машин было построено. Из них наибольшую известность получило колесо, изобретенное неким Орфиреусом в 1712 г. и предложенное им одному немецкому князю.

Колесо, которое изготовил Орфиреус, было 12 футов диаметром и поднимало груз в 70 фунтов на значительную высоту. Оно было помещено в особой комнате, пушено в ход; затем помещение печатали. Через два месяца помещенные открыты и оказалось, что колесо попрежнему вертелось.

Голландский физик Гравезанд в письме к Ньютону сообщает результаты своего осмотра колеса Орфиреуса. Гравезанд не мог однако осмотреть внутреннее устройство колеса, так как оно было тщательно закрыто. Орфиреус, обидевшись на то, что, не соблюдая обещанного секрета, показали его „изобретение“ Гравезанду, разломал колесо. Очевидно, он опасался, что будет обнаружен обман.

Еще раньше Орфиреуса англичанин Уорчестер заявил, что изобрел перпетуум мобиле. Он дает описание колеса диаметром 14 футов, вращающегося на горизонтальной оси и имеющего внутри себя 40 грузов по 50 фунтов каждый. Вследствие некоторого неизвестного устройства грузы с одной стороны колеса будто бы всегда оказывались на фут дальше от центра колеса, чем при нахождении их на другой стороне колеса.

Эта выдумка о построении колеса, которое всегда будет иметь перевес с одной стороны, также занимала многих.

Парижская Академия наук в 1775 г. постановила оставлять без ответа предложения, касающиеся перпетуум мобиле. Однако это не остановило потока самых разнообразных предложений и в XIX веке.

§ 4. РЫЧАГИ

Рассмотрение рычага, проведенное с различных точек зрения, дало нам возможность изучить ряд общих положений теоретической механики, в том числе и „золотое правило“.

Напомним основные определения, относящиеся к рычагу, а затем отметим некоторые случаи его применения в качестве простой машины.

Рычагом называется стержень, имеющий неподвижную ось вращения. На один конец рычага AOB (рис. 94) в точке A действует сила P , которая при вращении рычага преодолевает сопротивление Q , приложенное в точке B , и таким образом производит механическую работу. Если ось вращения находится между точками приложения сил, то рычаг называется рычагом первого рода (рис. 94, $a, б, г$); если же ось вращения находится на конце рычага, то его называют рычагом второго рода (рис. 94, $в$). Для равновесия рычага необходимо, чтобы алгебраическая сумма моментов всех сил, приложенных к рычагу, равнялась нулю, или, что одно и то же, сумма моментов сил, действующих на рычаг по часовой стрелке, должна равняться сумме моментов сил, действующих на рычаг против часовой стрелки. В случае двух сил P и Q , приложенных по концам рычага, имеем:

$$Pa = Qb,$$

где a и b — плечи рычага, считаемые от оси вращения по перпендикуляру до направления сил.

По формуле (2) определим силу P , необходимую для подъема груза:

$$P = \frac{Qb}{a}.$$

Пример. Какую силу P надо приложить к рукоятке A рычага (рис. 94, a), чтобы поднять груз $Q = 100$ кг, если $a = 0,5$ м, $b = 0,1$ м.

Решение.

$$P = \frac{Qb}{a} = \frac{100 \cdot 0,1}{0,5} = 20 \text{ кг}.$$

Форма рычага зависит преимущественно от условий его работы.

Поэтому рычаги могут быть равно-

плечими, неравноплечими, прямолинейными, коленчатыми и криволинейными. На рис. 94 показаны рычаги, которые служат рукоятками насосов, железнодорожных стрелок и сигналов, для управления бетономешалок и многих других машин.

Землевозная тачка (рис. 52) была упомянута (статика, гл. 4, § 3) как пример рычага второго рода. Когда землекоп поднимает тачку за рукоятки, то центр тяжести C насыпанной в тачку земли находится очень близко к отвесной линии, проходящей через точку опоры O . Поэтому усилие, приложенное на концах рукояток, будет значительно меньше величины груза.

В большинстве случаев рычаги, как и прочие простые машины, применяются для осуществления выигрыша в силе.

Чтобы еще больше увеличить этот выигрыш, устраивают в сложных машинах системы рычагов. На рис. 95 показана схема соединения двух рычагов второго рода AO и A_1O_1 .

Усилие P , действующее на конце A верхнего рычага, передается стержнем BA_1 на длинный конец нижнего рычага A_1O_1 ,

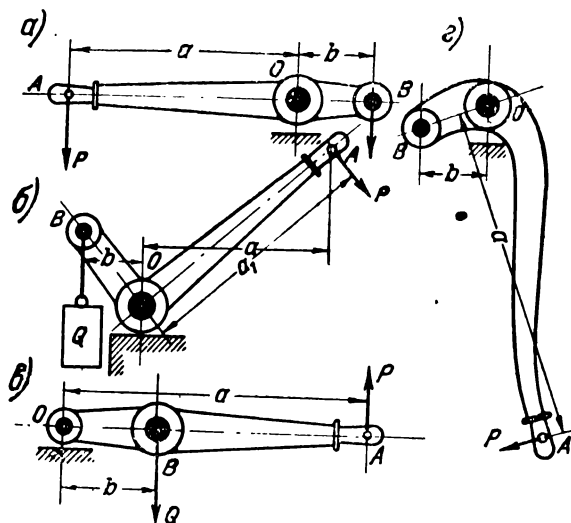


Рис. 94. Рычаги рукоятки:

$a, б, г$ — рычаги первого рода; $в$ — рычаг второго рода.

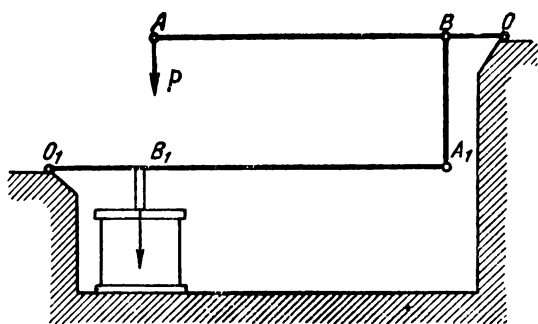


Рис. 95. Система из двух рычагов.

а отсюда в точку B_1 нижнего рычага и на тот предмет, сопротивление которого надо преодолеть.

Трение на опоре рычага невелико и в простейших расчетах не учитывается.

§ 5. БЛОКИ

Блок представляет собой желобчатый диск или колесо, вращающееся в обоймце на оси ab (рис. 96).

Назначение блоков — передавать силу, изменяя величину или направление ее. В принципе блок является вращающимся рычагом.

Рассмотрим неподвижный и подвижной блоки и сочетания их.

Неподвижный блок

Неподвижным называется блок, обоймца которого подвешивается к неподвижной точке привеса.

Этот блок употребляется исключительно для изменения направления силы, так как выигрыша в силе он не дает.

Действительно, блок подобен равноплечему рычагу. Он находится в равновесии, если момент силы $Q \cdot OB$, действующий вправо, равен моменту силы $P \cdot AO$, действующему влево:

$$Q \cdot OB = P \cdot AO.$$

Как только величина P немного превысит величину Q , начнется вращение блока и подъем груза. Мы не выигрываем в силе и не проигрываем в скорости.

Например если двигатель P переместится на расстояние h , то одновременно груз Q поднимется на такое же расстояние h .

Следовательно работа двигателя Ph равна работе сопротивления Qh :

$$Ph = Qh.$$

Мы не учитывали трения в блоке, которое несколько изменит выведенное сопротивление. Трение поглощает от 5 до 15% работы двигателя в зависимости от материала каната и его толщины.

Таким образом коэффициент полезного действия блока составляет $k = 0,95 - 0,85$.

Учитывая коэффициент k , получим следующее равенство:

$$Qh = kPh.$$

Сокращая на h , получим:

$$Q = kP$$

или

$$P = \frac{Q}{k}.$$

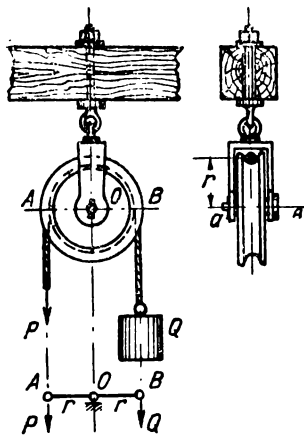


Рис. 96. Неподвижный блок.

Пример. Определить силу P , необходимую для подъема груза $Q = 100$ кг посредством неподвижного блока. Коэффициент полезного действия $k = 0,9$.

Решение.

$$P = \frac{Q}{k} = \frac{100}{0,9} = 111 \text{ кг.}$$

Подвижной блок

Подвижной блок может перемещаться при подъеме груза (рис. 97, а).

Для этой цели один конец веревки, огибающей блок, укрепляют неподвижно, а на другой действуют силой P , поднимающей груз Q , подвешенный к обоймце.

Для удобства работы при помощи подвижного блока к нему присоединяют неподвижный блок (рис. 97, б), который изменяет направление тягового усилия вниз. Такая система блоков применяется в различных подъемных приспособлениях.

Подвижной блок можно уподобить рычагу второго рода, у которого точка опоры O , а точки приложения силы A и B (рис. 97, а).

Напишем равенство моментов сил, действующих на блок:

$$P \cdot 2r = Q \cdot r,$$

где r — радиус блока; отсюда

$$P = \frac{Qr}{2r} = \frac{Q}{2}.$$

Итак:

$$P = \frac{Q}{2}.$$

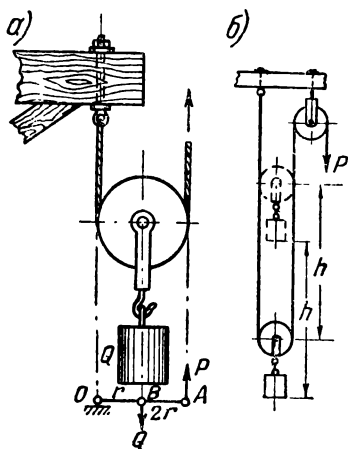


Рис. 97. Подвижной блок.

Стало быть, поднимая груз Q силой P , мы вдвое выигрываем в силе, но в то же время вдвое проигрываем в скорости. Последнее обстоятельство нетрудно установить по рис. 97, б. Например для того, чтобы поднять блок с грузом на высоту h , необходимо свободный конец веревки опустить на $2h$. При этом работа двигателя P равна работе сопротивления Q .

$$P \cdot 2h = Qh.$$

Если принять в расчет сопротивление трения, то равенство работ примет вид:

$$Qh = kP \cdot 2h.$$

Отсюда

$$P = \frac{Q}{2k}.$$

Пример 1. Требуется поднять груз $Q = 150$ кг при помощи подвижного и неподвижного блоков.

Определить силу P , необходимую для подъема, не учитывая трения.

Решение.

$$P = \frac{Q}{2} = \frac{150}{2} = 75 \text{ кг.}$$

Пример 2. Решить предыдущий пример, принимая в расчет трение. Коэффициент полезного действия подвижного блока $k=0,95$; для неподвижного блока $k=0,9$.

Решение. Коэффициент полезного действия обоих блоков составит:

$$k = 0,95 \cdot 0,9 = 0,855.$$

Подъемная сила:

$$P = \frac{Q}{2k} = \frac{150}{2 \cdot 0,855} = 86,5 \text{ кг.}$$

Тали

Тали представляют собой сочетание подвижных и неподвижных блоков.

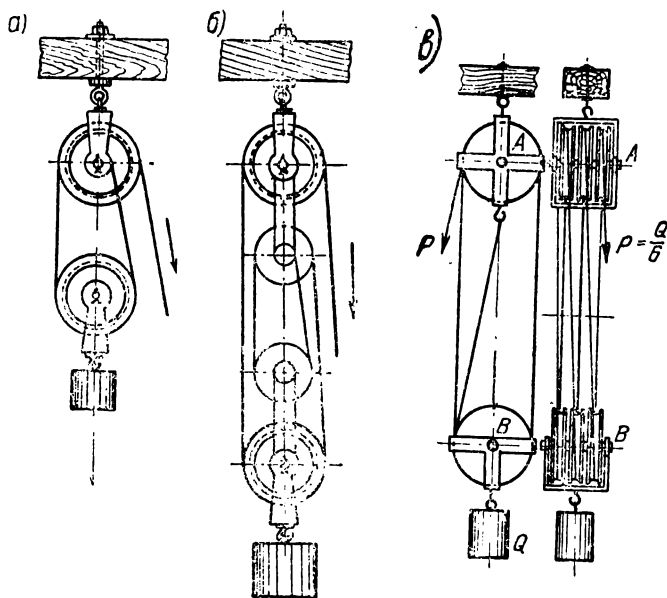


Рис. 98. Тали:

a — простейшие тали; *б* — комбинация из двух неподвижных и двух подвижных блоков; *в* — комбинация из трех неподвижных и трех подвижных блоков.

Применение неподвижных блоков, которые не дают выигрыша в силе, необходимо только для того, чтобы направлять тяговое усилие вниз.

Простейшие тали показаны на рис. 98, *a*.

Количественное отношение сил и скоростей в этой системе блоков то же, что и в одном подвижном блоке.

Если мы возьмем комбинацию двух подвижных и двух неподвижных блоков, то выигрыш в силе составит:

$$Q : P = 4 \quad (\text{рис. 98, б}).$$

Отношение скоростей также будет равно 4.

Вообще $P = \frac{Q}{n}$, где n — число блоков.

Сила менее сопротивления во столько раз, сколько всех блоков.

В действительности, чем больше блоков, тем больше величина трения, значительно изменяющая выведенное соотношение.

На рис. 98, в изображены тали другого устройства. В них блоки подвижные и неподвижные сидят на двух общих осях А и В.

Канат, начиная от крюка верхней обоймицы, последовательно охватывает все блоки. Здесь получается тот же выигрыш в силе, как и в таях, описанных ранее, т. е. $P = \frac{Q}{n}$.

§ 6. ВОРОТ

Ворот представляет собой соединение вала и рычага, служащее для подъема грузов (рис. 99). На вал наматывается канат,

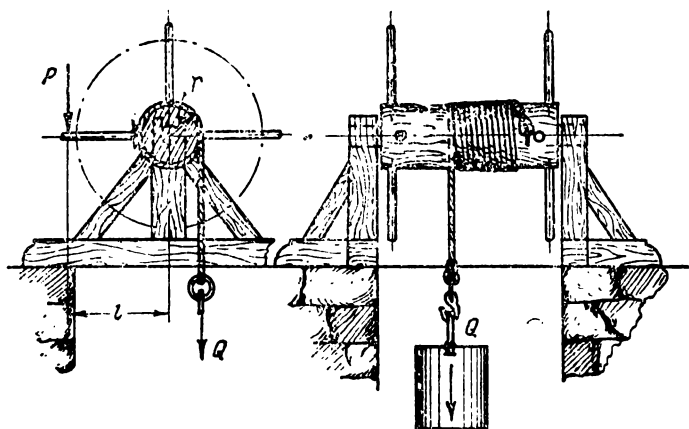


Рис. 99. Ворот.

к которому прикреплен поднимаемый груз Q . Величина подъемной силы P , действующей на рукоятках, определится из равенства моментов:

$$P \cdot l = Q \cdot r,$$

откуда

$$P = Q \frac{r}{l},$$

где r — радиус вала; l — длина рукоятки. Для уменьшения усилия P необходимо или уменьшить радиус вала или увеличить длину рукоятки; при этом мы будем соответственно терять в скорости подъема.

На преодоление трения и жесткости канатов расходуется около 25% работы двигателя, так что коэффициент полезного действия работы ворота в среднем составляет $k=0,75$. Поэтому имеем в действительности

$$P = \frac{Qr}{lk}.$$

Пример 1. Груз $Q=120$ кг надо поднять посредством ворота; диаметр ворота $d=30$ см, длина рукоятки $l=90$ см; определить подъемную силу P , не учитывая трения.

Решение. Радиус вала

$$r = \frac{d}{2} = 15,$$

$$P = \frac{Qr}{l} = \frac{120 \cdot 15}{90} = 20 \text{ кг}.$$

Пример 2. Решить предыдущий пример, принимая в расчет коэффициент полезного действия ворота $k=0,75$.

Решение.

$$P = \frac{Qr}{lk} = \frac{120 \cdot 15}{90 \cdot 0,75} = 26,6 \text{ кг}.$$

§ 7. НАКЛОННАЯ ПЛОСКОСТЬ

Предположим, что по наклонной плоскости AB поднимается груз (рис. 100, а).

Разложим Q на две составляющие: P_1 —параллельную плоскости и P_2 —перпендикулярную к ней. Сила P_1 стремится двигать груз вниз по наклонной плоскости; сила P_2 прижимает груз к плоскости.

Если не принимать в расчет трения, то для подъема груза необходимо приложить силу P , равную силе P_1 и противоположно направленную. Определим величину силы P .

Из подобия треугольников ABC и P_1OQ имеем:

$$P_1 : Q = BC : AB = h : l.$$

Учитывая, что $P_1 = P$, напишем:

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{l}.$$

На основании полученного равенства заключаем, что сила P во столько раз меньше груза Q , во сколько высота наклонной плоскости меньше ее длины.

$$P = Q \frac{h}{l}.$$

Заметим, что сила P на расстоянии l прodelывает работу Pl . При этом груз Q поднимается на высоту h ; его работа Qh . Таким образом работа двигателя P равна работе полезного сопротивления Q .

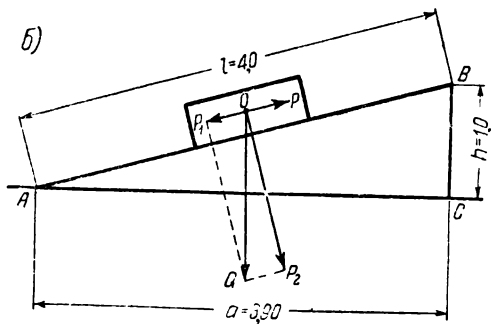
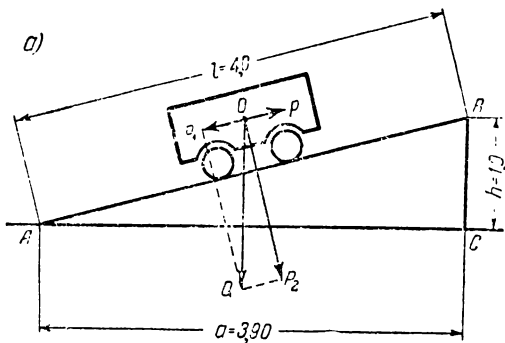
Из последнего равенства снова получим:

$$P = \frac{Qh}{l}.$$

Пример 1. Груз $Q = 300$ кг вкатывается по наклонному настилу на высоту $h = 1,0$ м; длина настила $l = 4,0$ м. Определить необходимую для подъема силу, не учитывая трения (рис. 100, а).
Решение.

$$P = \frac{Qh}{l} = \frac{300 \cdot 1}{4} = 75 \text{ кг.}$$

Трение катания незначительно изменит выведенное соотношение между величиной двигателя и сопротивления. Иначе обстоит дело при наличии трения скольжения (рис. 100, б).



Давление P_2 вызывает при движении тела Q по доскам силу трения $F = f \cdot P_2$, где f — коэффициент трения. В таком случае подъемная сила будет:

$$P = P_1 + fP_2.$$

Сила P_2 определится из подобия рассмотренных треугольников ABC и P_1OQ по пропорции

$$P_2 : Q = a : l,$$

откуда

$$P_2 = Q \frac{a}{l}.$$

Значит, если принять в расчет силу трения, то подъемная сила будет:

Рис. 100. Наклонная плоскость:

а — подъем груза посредством качения; б — подъем груза посредством скольжения.

$$P = Q \frac{h}{l} + fQ \frac{a}{l}.$$

Пример 2. Решить предыдущий пример, принимая в расчет силу трения, если коэффициент трения $f = 0,3$. Размеры наклонной плоскости даны на рис. 100, б.

Решение.

$$P = Q \frac{h}{l} + fQ \frac{a}{l} = 75 + 0,3 \cdot 300 \frac{3,9}{4} = 75 + 87 = 162 \text{ кг.}$$

Из рассмотренного примера 2 приходим к следующим выводам:

1) При употреблении наклонной плоскости трение скольжения имеет очень большое значение.

2) При сравнительно пологих наклонах плоскости основание плоскости a очень мало отличается от длины l , а сила P_2 ,

незначительно отличается от силы Q . Поэтому для упрощения вычислений надо принимать в расчет вместо основания a длину плоскости l , а вместо силы P_2 — силу Q и решать задачу по формуле:

$$P = Q \frac{h}{l} + fQ.$$

Подставляем в последнюю формулу данные из примера 2:

$$P = 300 \frac{1}{4} + 0,3 \cdot 300 = 75 + 90 = 165 \text{ кг.}$$

Полученный результат менее чем на 2% отличается от решения примера 2.

На основании многочисленных исследований установлены нормы уклона в различных случаях применения наклонной плоскости.

Так например, уклон рельсового пути при подъеме не должен, как правило, превышать 0,008, т. е. 8 мм на 1 м длины пути.

Лестницы, которые также представляют собой наклонные плоскости, делаются обычно с подъемом h в 2 и $1\frac{1}{2}$ раза меньше основания (заложения) a .

§ 8. ВИНТ

Действие всякого винта основано на видоизменении действия наклонной плоскости.

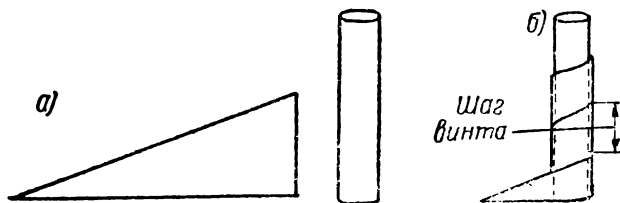


Рис. 101. Принцип работы винта:

a — наклонная плоскость и стержень; *б* — наклонная плоскость, накрученная на стержень.

Разрежем бумажный четырехугольник по диагонали так, чтобы получился треугольник с небольшим углом при вершине (рис. 101, *a*); мы получим изображение наклонной плоскости.

Если этот треугольник накатать на карандаш, то получится винтовая линия, представляющая накрученную наклонную плоскость (рис. 101, *б*).

Рассмотрим винтовой домкрат (рис. 102).

В нем винт, вращаемый рукояткой в нарезке подставки B , поднимается вместе с грузом.

Пусть сила P вращает винт, будучи приложена к рукоятке длиной R . При каждом обороте винта груз Q поднимается на величину h , равную одному шагу винта. Для определения зави-

симости между силой P и грузом Q напишем равенство их работ. При каждом обороте винта путь, пройденный силой P , составит $2\pi R$, а ее работа $P \cdot 2\pi R$. В то же время груз Q будет поднят на высоту h и его работа составит Qh .

Поэтому

$$P \cdot 2\pi R = Qh.$$

Отсюда

$$P = Q \frac{h}{2\pi R}.$$

Выигрыш в силе тем больше, чем меньше шаг винта h и чем больше длина рукоятки R .

Пример 1. Радиус вращения рычага домкрата $R = 1$ м и шаг винта $h = 1$ см.

Определить усилие P , необходимое для подъема груза $Q = 1000$ кг, не учитывая трения.

Решение.

$$P = \frac{Qh}{2\pi R} = \frac{1000 \cdot 1}{2 \cdot 3,14 \cdot 100} = 16 \text{ кг}.$$

Пример 2. Небольшое здание весом 8 т надо поднять четырьмя домкратами, установленными по углам (рис. 102).

Радиус вращения рычагов домкратов $R = 100$ см и шаг винта $h = 0,5$ см.

Определить усилие, которое потребуется приложить к рычагу. Трение не учитывать.

Решение. На один домкрат приходится нагрузка $8000 \text{ кг} : 4 = 2000 \text{ кг}$.

$$P = \frac{Qh}{2\pi R} = \frac{2000 \cdot 0,5}{2 \cdot 3,14 \cdot 100} = 1,6 \text{ кг}.$$

В предыдущем примере было установлено, что для подъема груза в 1000 кг необходимо усилие в 1,6 кг.

Здесь такое же усилие необходимо для подъема груза в 2000 кг.

Вместе с тем подъем осуществляется в 2 раза медленнее, так как шаг винта уменьшен вдвое.

Следовательно, выигрывая в силе, теряем в скорости.

Рассмотрим теперь влияние трения.

Кроме подъема груза (работа Qh) сила двигателя P должна преодолеть работу силы трения.

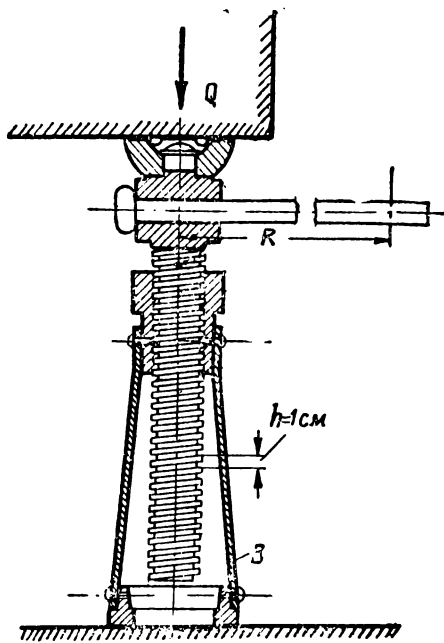


Рис. 102. Работа домкрата.

Величину силы трения можно принимать по формуле $F = fQ$, где f — коэффициент трения металла по металлу.

Работа трения составит $fQ \cdot 2\pi r$, где r — радиус винта.

Равенство работ примет вид:

$$P \cdot 2 \cdot R = Qh + fQ \cdot 2\pi R.$$

Отсюда

$$P = \frac{Qh}{2\pi R} + fQ \frac{r}{R}.$$

Пример 3. Решить предыдущий пример, принимая в расчет трение, если коэффициент трения металла по металлу со смазкой $f = 0,07$ и радиус винта 5 см.

Решение. Определим работу трения:

$$fQ \frac{r}{R} = 0,07 \frac{2000 \cdot 5}{100} = 7 \text{ кг.}$$

Полное усилие составит:

$$P = 1,6 \text{ кг} + 7 \text{ кг} = 8,6 \text{ кг.}$$

Винты применяются для преодоления значительных сопротивлений при подъеме грузов на небольшую высоту, при сжатии (прессовании) материалов, для скрепления частей механизмов и различных сооружений между собой и во многих других случаях.

§ 9. КЛИН

Клин представляет собой по существу двойную наклонную плоскость.

Приложим силу P к верхней грани клина $AB = h$ и определим давление, развиваемое боковыми гранями $AC = BC = a$ (рис. 103). Для этой цели разложим силу P на две равные силы N , перпендикулярные щекам клина. Параллелограм, получаемый при этом, будет состоять из двух треугольников NOP , подобных треугольнику клина ABC ; отсюда определится величина N :

$$N : P = AC : AB = a : h,$$

следовательно

$$N = P \frac{a}{h}.$$

При устройстве клина всегда его верхняя грань значительно меньше боковых граней, поэтому силой P мы преодолеваем значительно большее сопротивление. Вышеуказанное определено без учета трения, которое при употреблении клиньев достигает большой величины и существенно изменяет полученное соотношение.

Не останавливаясь на различных случаях применения клиньев в строительной практике, отметим, что режущие инструменты

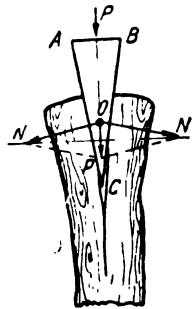


Рис. 103. Работа клина.

также представляют собой клинья. Эти инструменты содержат или один резец (долото, стамеска, рубанок и т. д.), или же целую систему резцов (пила). Всякий отдельный резец или клин вонзается в обрабатываемый материал, например древесину, и отделяет некоторую его часть.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие машины называются простыми?
 2. Сформулируйте „золотое правило“.
 3. Что такое коэффициент полезного действия машин?
 4. Назовите два вида трения.
 5. Объясните принцип устройства шариковых подшипников.
 6. Какой выигрыш в силе дает подвижной блок?
 7. На каком принципе основано устройство винтового домкрата?
-

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. ПРЕДМЕТ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ¹

В сопротивлении материалов излагаются методы определения поперечных размеров частей сооружения, обеспечивающих прочность этих частей при наименьшей затрате материалов.

Сопротивление материалов основывается на положениях теоретической механики и экспериментальном изучении материалов.

§ 2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ НАУКИ О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

Науку о сопротивлении материалов, или науку о прочности, основал Галилей.

Сам он отмечает, что „много поработал над этим предметом, так что не напрасно его учение может претендовать на название новой науки“ („Беседы“).

В древности и в средние века при выборе размеров частей сооружений руководствовались предшествующими постройками. Типы сооружений изменялись медленно и сами сооружения являлись как бы объектами для опытов. Если сооружение оказывалось прочным, оно служило образцом для дальнейшего строительства.

В постройках не считались с количеством расходуемых материалов и затратой времени. Неудивительно, что старинные здания отличались чрезмерно толстыми стенами, столбами, сводами; более или менее значительные сооружения строились по 30—40 лет.

Однако это не спасало от катастроф, происходивших чаще всего в тех случаях, когда возводились постройки, существенно отличавшиеся от предыдущих своими размерами или формами.

Во время одной из таких катастроф — обвала огромного цирка (вблизи Рима) было убито и ранено несколько десятков тысяч человек. Историк сравнивает это событие с потерями от больших войн.

В XVII веке в Италии помимо гражданского строительства усиленно развивалось судостроение. Расширение торговли и судоходства требовало значительного увеличения размеров судов. При этом старые правила строительства, главившие, что соблюдение определенных геометрических пропорций в частях сооружений служит достаточной гарантией прочности, оказались непригодными. Строители убедились, что пропорциональное увеличение всех размеров корабля не обеспечивает его прочности.

Требования строительной практики и побудили Галилея начать исследования прочности сооружений. Он произвел много опытов и затем приступил к теоретической обработке полученных результатов. Свои наблюдения и выводы Галилей изложил в знаменитых „Беседах“.

¹ Правильнее было бы: „Предмет науки о сопротивлении материалов“. Однако общепринята вышеуказанная формулировка.

§ 3. УПРУГОЕ ТЕЛО И ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ

В статике были изучены условия равновесия сил, действующих на твердое тело.

Силами мы называли взаимодействие отдельных тел, например давление балки на опоры, реакции опор и т. д. Эти силы являлись внешними в отношении тел, которые рассматривались как абсолютно твердые, неизменяемые. В статике не затрагивались вопросы о том, какие деформации претерпевает в действительности тело под действием внешних сил, какие силы развиваются при этом внутри тела и не разрушится ли оно в результате действия сил.

В сопротивлении материалов в отличие от вышеизложенного тела рассматриваются не как абсолютно твердые, а как упругие тела, изменяющие под действием внешних сил свою форму, но способные возвращаться в известных пределах к своей прежней форме по удалении внешних сил.

Деформация называется упругой, если она исчезает после прекращения действия внешних сил на тело.

Деформация называется остающейся, если она сохраняется и после устранения внешних сил. Например растянутая пружина весов принимает первоначальную форму, когда груз снят; чрезмерно растянутая пружина приобретает остающуюся деформацию („вытягивается“).

До некоторого предела, называемого пределом упругости и свойственного многим материалам, остающиеся деформации настолько ничтожны, что ими пренебрегают, и все деформации до этого предела считаются упругими. С переходом за предел упругости наблюдается заметное нарастание остающихся деформаций.

В сопротивлении материалов тела предполагаются однородными по своему строению и состоящими из мельчайших частиц, связанных между собой внутренними силами или силами упругости. Эти силы не дают частицам тела удаляться одна от другой и не позволяют им сближаться, вследствие чего тело сохраняет ту форму, которая была ему придана при изготовлении. Когда внешние силы стремятся деформировать тело, внутренние силы сопротивляются этому.

Величина внутренних сил, возникающих в каком-нибудь сечении тела, определяется следующим образом.

Представим себе брус, находящийся в равновесии под действием внешних сил P и P_1 , равных и противоположно направленных (рис. 104). Мысленно разрежем брус на две части A и B и отбросим например часть B .

Тогда, для того чтобы часть A осталась в равновесии, надо к сечению приложить силы, которые уравновесят действие внешних сил P . Это и будут внутренние силы тела, действующие в данном сечении.

Допустим например, что железный стержень AB , растянутый грузом $P = 4000$ кг, разрезан по сечению $I-I$ (рис. 105, а). Тогда во избежание падения груза надо приложить к сечению

силы, равные P (4 000 кг) и направленные в противоположную сторону (рис. 105, б). Это и есть величина внутренних сил растянутого стержня.

Величина внутренней силы, приходящейся на единицу площади поперечного сечения тела, называется напряжением. Сила измеряется в кг; за единицу площади принимают чаще всего см^2 , иногда мм^2 . Напряжение обозначается греческой буквой σ и измеряется в $\text{кг}/\text{см}^2$ или $\text{кг}/\text{мм}^2$; силы обозначаются латинскими буквами P и Q , площадь поперечного сечения — латинской буквой F . Тогда напряжение в материале растянутого тела можно определить по формуле:

$$\sigma = \frac{P}{F} \quad (1)$$

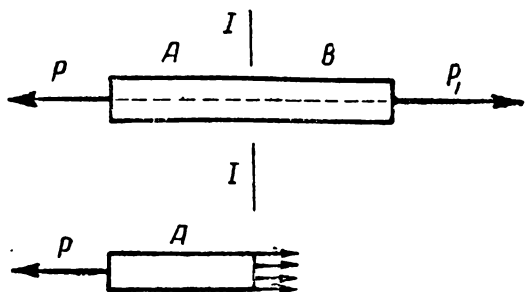


Рис. 104. Выявление внутренних сил методом сечений.

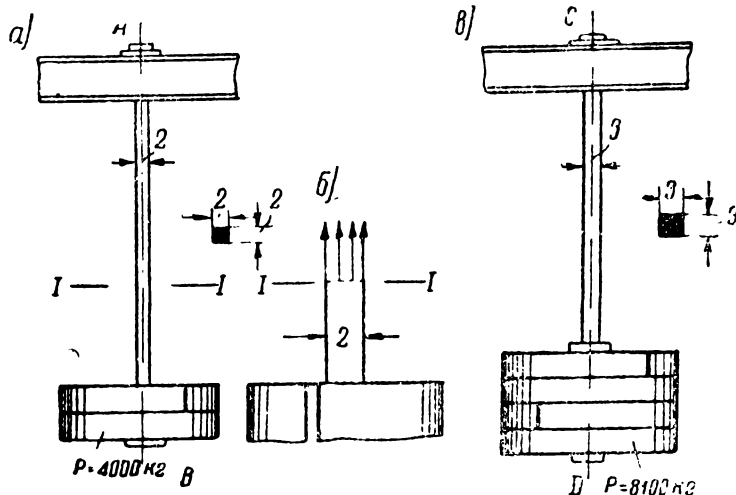


Рис. 105. Определение напряжений в стержнях.

а — растяжение стержня AB ; б — выявление внутренних сил методом сечений; в — растяжение стержня CD .

Допустим, что стержень AB , растянутый силой $P = 4\,000$ кг, имеет сечение $F = 4$ см^2 (рис. 105). Напряжение в материале стержня составит:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{4\,000 \text{ кг}}{4 \text{ см}^2} = 1\,000 \text{ кг}/\text{см}^2.$$

Предположим, что стержень CD , имеющий сечение $F = 9$ см^2 , растянут силой $P = 8\,100$ кг (рис. 105, в). Эта сила более чем в два раза превосходит силу, растягивающую стержень AB .

Определим напряжение в материале стержня:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{8\ 100\ \text{кг}}{9\ \text{см}^2} = 900\ \text{кг/см}^2 < 1\ 000\ \text{кг/см}^2.$$

Напряжение в стержне CD на 10% меньше, чем в стержне AB . Напряжения, направленные перпендикулярно к плоскости рассматриваемого сечения, называются нормальными напряжениями.

Напряжения, действующие в плоскости сечения, называются касательными.

§ 4. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ

В зависимости от направления действия внешних сил могут возникнуть следующие деформации тела.

Растяжение появляется в теле, когда внешняя сила, приложенная к телу по направлению его оси, удлиняет тело, увеличивая расстояние между его частицами. В материале тела возникает сопротивление растяжению.

Растяжение испытывают канаты подъемников (рис. 74), ремни

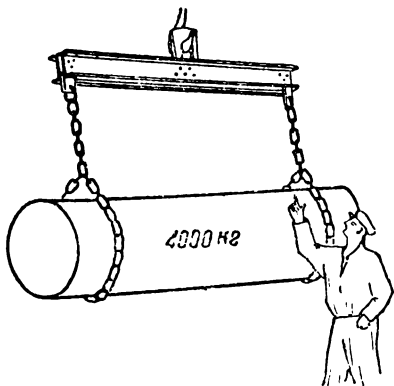


Рис. 106. Растяжение цепей подъемного устройства.

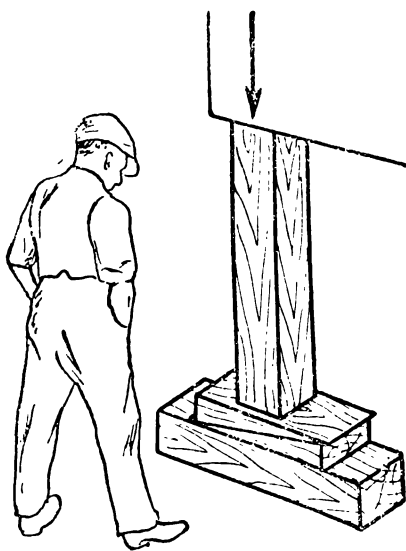


Рис. 107. Сжатие деревянной стойки.

передач (рис. 78), сцепки вагонов, цепи подъемных устройств (рис. 106) и т. п.

Сжатие представляет собой деформацию, противоположную растяжению.

Здесь внешняя сила, направленная по оси тела, стремится его укоротить, сближая частицы тела.

В материале тела возникает сопротивление сжатию.

Сжатие имеет место в нагруженных стойках (рис. 107), в кладке стен, столбов и фундаментов, в грунте под фундаментами (рис. 108) и т. д.

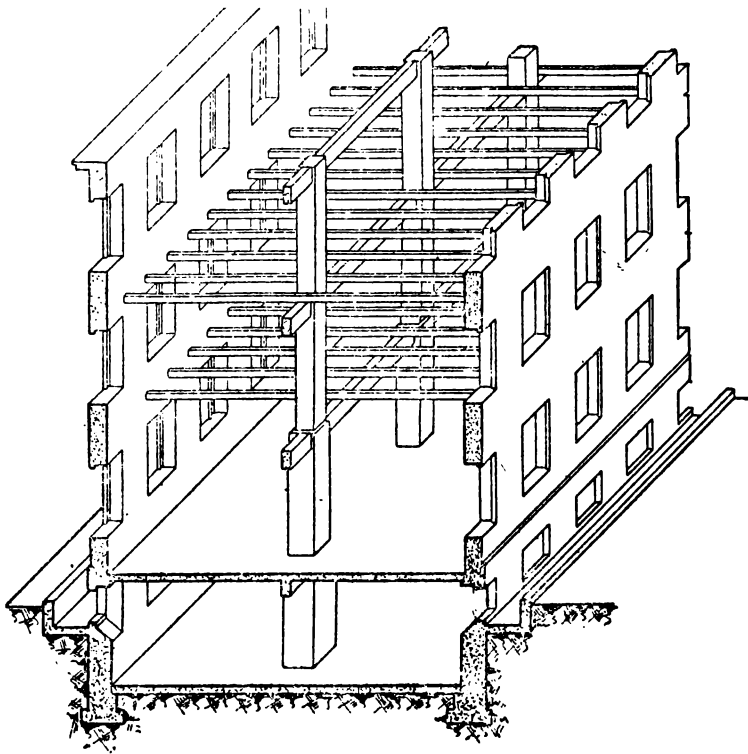


Рис. 108. Сжатые части здания: стены, столбы, фундаменты.

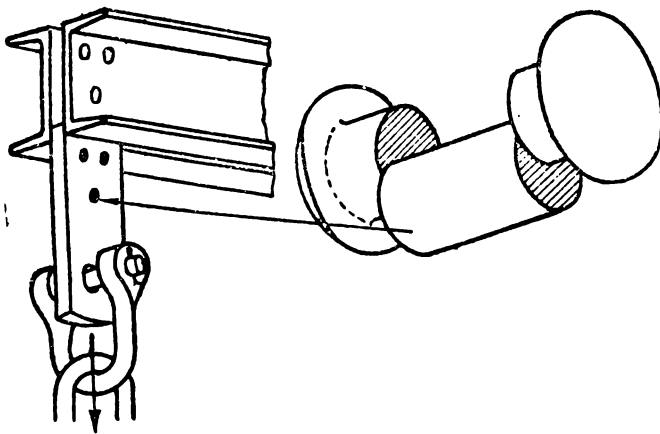


Рис. 109. Сдвиг в заклепочном соединении.

Сдвиг происходит в том случае, когда внешние силы стремятся переместить одну часть тела относительно другой.

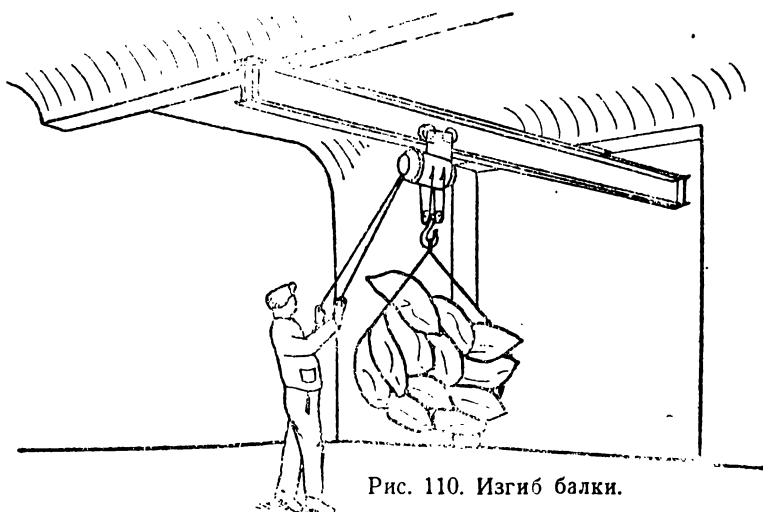


Рис. 110. Изгиб балки.

В материале тела появляется сопротивление сдвигу. На сдвиг работают некоторые врубки, заклепки соединений (рис. 109).

Изгиб происходит в том случае, когда внешние силы действуют под углом к оси тела. В материале тела возникает сопротивление изгибу.

Деформации изгиба происходят в балках перекрытий (рис. 108 и 110), лестниц, мостов и т. п.

Кручение вызывают внешние силы, стремящиеся повернуть два смежных сечения тела друг относительно друга. В материале тела возникает сопротивление кручению. Деформация кручения происходит в трансмиссионных валах (рис. 111), паровозных осях и т. п.

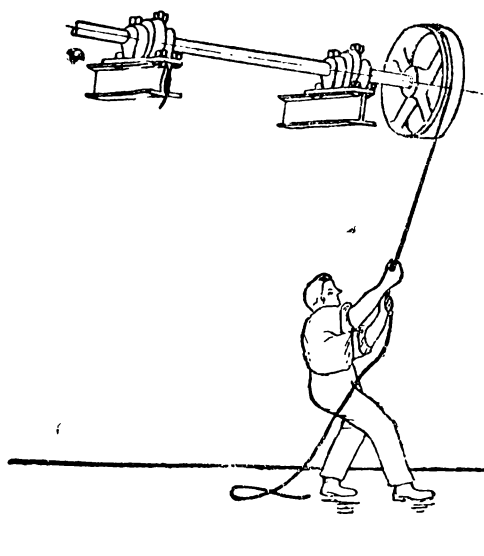


Рис. 111. Кручение.

Сложные деформации. Действие нескольких различно направленных сил может вызывать одновременно две и более из вышеуказанных деформаций, например: изгиб и растяжение, изгиб и кручение и т. д. Такие деформации носят название сложных деформаций.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем заключается предмет сопротивления материалов?
2. Когда возникают внутренние силы сопротивления?
3. Что такое напряжение?
4. Назовите основные виды деформаций.
5. Какие деформации называются упругими и остающимися?

Глава I

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

§ 1. ЗАКОН ГУКА

Для того чтобы исследовать сопротивление материала при различных деформациях, производят испытания образцов материала посредством специальных машин.

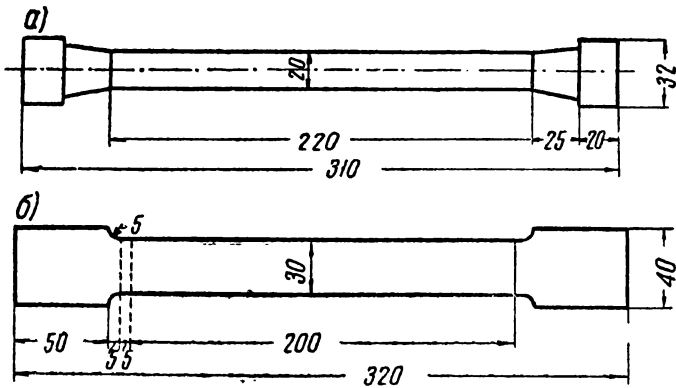


Рис. 112. Нормальные образцы стали для испытания на растяжение:

а — образец круглого сечения; б — образец пр. моугольного сечения.

На рис. 112 изображены образцы стали для испытания на растяжение.

Многочисленные испытания на растяжение привели к выводу, что упругие удлинения образца Δl („дельта эль“) прямо пропорциональны нагрузке P , длине образца l и обратно пропорциональны площади его поперечного сечения F :

$$\Delta l = \frac{Pl}{FE}. \quad (2)$$

Пропорциональная зависимость между величиной удлинения и вызывающей его силой называется законом Гука.

Английский ученый Гук установил этот закон в 1676 г. в результате различных опытов, в том числе: растяжение проволоки; растяжение витковой пружины; растяжение спиральной часовой пружины и др.

Видя везде подтверждение одной и той же зависимости, Гук признал ее общим законом упругих явлений и высказал следующее положение: „Каково растяжение, такова и сила“.

Формула (2) содержит в знаменателе величину E , называемую модулем упругости или модулем Юнга¹. Каждому материалу свойственна особая величина E , которая характеризует сопротивляемость материала растяжению. Чем больше модуль упругости, тем меньше растягивается стержень.

Для стали $E = 2\,100\,000$ кг/см²
 „ дерева $E = 110\,000$ „
 „ резины $E \approx 11$ „

Если три бруска стальной, деревянный и резиновый — имеют одинаковые поперечные сечения и растягиваются равными силами, то удлинение деревянного бруска будет приблизительно в 20 раз больше удлинения стального, а удлинение резинового бруска будет почти в 200 000 раз больше удлинения стального.

Определим величину E из формулы (2):

$$E = \frac{P}{F} : \frac{\Delta l}{l}. \quad (3)$$

Рассматривая формулу (3), замечаем, что величина $\frac{P}{F}$ является напряжением бруска $\sigma = \frac{P}{F}$, а величина $\frac{\Delta l}{l}$ представляет собой отношение полной величины удлинения к длине бруска, называемое относительным удлинением и обозначаемое буквой ϵ („эпсилон“). Тогда

$$E = \sigma : \epsilon = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad (3a)$$

т. е. модуль упругости E равен отношению между напряжением σ и относительным удлинением ϵ .

Пример. Исследуемый участок стального образца имеет сечение $F = 190$ мм² и длину $l = 100$ мм. При растягивающей нагрузке в 400 кг участок удлинился на 0,01 мм.

Определить модуль упругости стали E .

Решение. Модуль упругости определяем по формуле (3):

$$E = \frac{P}{F} : \frac{\Delta l}{l} = \frac{400}{190} : \frac{0,01}{100} = 21\,000 \text{ кг/мм}^2,$$

или $2\,100\,000$ кг/см².

Знание величин модулей упругости материалов важно в теоретическом и в практическом отношении. С помощью их можно установить, какое удлинение произведет данная сила при растяжении бруска данных размеров. Наоборот, по величине удлинения можно определить растягивающую силу.

§ 2. ДИАГРАММА РАСТЯЖЕНИЯ

В испытательных машинах обычно имеется приспособление, которое автоматически вычерчивает кривую зависимости между удлинениями и нагрузками. На рис. 113 дана диаграмма испытания образца стали (Ст.-3).

Рассмотрим следующие точки, отмеченные на диаграмме.

¹ По фамилии ученого, который установил понятие о модуле упругости.

До точки *A* идет прямая линия, следовательно удлинения растут пропорционально нагрузкам. Прямая *OA* является графическим изображением закона Гука. Точка *A* соответствует пределу пропорциональности.

В непосредственной близости от предела пропорциональности находится точка *B*, определяющая собой предел упругости, т. е. ту величину напряжений, ниже которой получаются упругие деформации, а выше — упругие и остающиеся.

Практически можно считать, что пределы пропорциональности и упругости совпадают. Им соответствует напряжение 2200 кг/см^2 .

Далее у точки *C* появляется горизонтальный участок. Здесь происходит увеличение длины образца без увеличения нагрузок, так называемое течение материала. Напряжение, соответствующее этому участку, равно 2500 кг/см^2 и называется пределом текучести.

Наибольший подъем кривой в точке *D* показывает величину максимальной нагрузки, выдержанной образцом. Напряжение, соответствующее точке *D*, называется пределом прочности или временным сопротивлением.

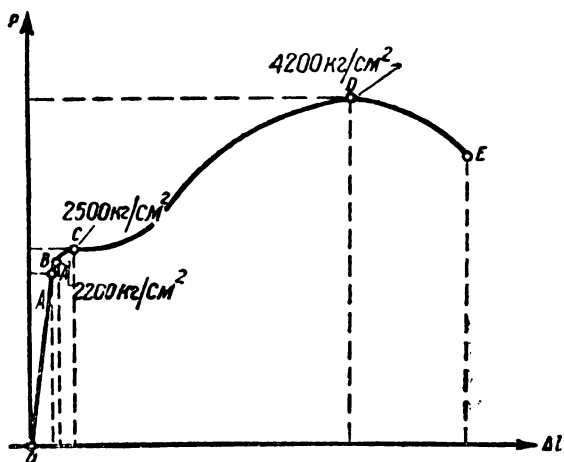


Рис. 113. Диаграмма испытания на растяжение стального образца.

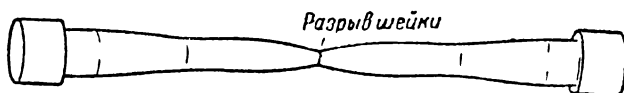


Рис. 114. Разорванный стальной образец.

Оно составляет 4200 кг/см^2 .

Разрушение образца происходит при следующих обстоятельствах. В образце появляется все возрастающее сужение (шейка) (рис. 114). Вследствие сужения площадь поперечного сечения образца уменьшается, напряжение в нем увеличивается, в результате происходит разрыв образца (на диаграмме точка *E*).

Мы рассмотрели диаграмму растяжения стального образца. Для других материалов, применяемых в строительной практике, не получается такой четкой кривой; предел упругости устанавливается довольно условно.

Так например, для дерева диаграмма растяжения имеет вид прямой линии почти до самого разрушения. Предел упругости составляет около $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{5}$ от предела прочности.

Пример. Сосновый образец разорван силой $P=700$ кг.
Сечение образца 25×4 мм.
Определить предел прочности R сосны на растяжение.
Решение.

$$R = \frac{700}{25 \cdot 4} = 7 \text{ кг/мм}^2, \text{ или } 700 \text{ кг/см}^2.$$

§ 3. СЖАТИЕ

Для изучения сопротивления сжатию различных материалов производят опыты над образцами, доводя их до разрушения. Образцам из металла, дерева или камня придают форму кубиков или цилиндров (рис. 115).

Многочисленные опыты показали, что закон Гука, установленный при растяжении, справедлив и при сжатии. Следовательно упругие укорочения прямо пропорциональны нагрузке, длине образца и обратно пропорциональны площади поперечного сечения.

$$\Delta l = \frac{Pl}{FE}.$$

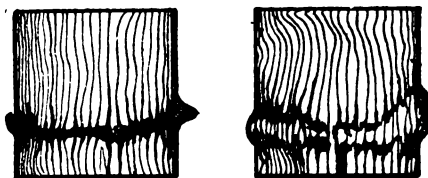


Рис. 115. Раздавленный деревянный образец.

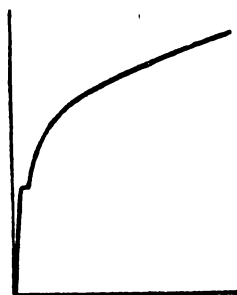


Рис. 116. Диаграмма испытания на сжатие стального образца.

На рис. 116 приведена диаграмма сжатия стального образца; она имеет тот же вид, что и диаграмма растяжения.

На диаграмме можно найти пределы пропорциональности и текучести.

Все сказанное о сжатии относится в полной мере к телам, длина которых незначительно превосходит размеры их поперечного сечения.

При сжатии длинных и тонких тел возникает деформация продольного изгиба (выпучивания). Это явление будет рассмотрено в главе 5.

§ 4. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

В материалах могут быть допущены только такие напряжения, которые совершенно безопасны для прочности сооружения, но не являются заниженными.

Эти напряжения называются допускаемыми напряжениями; их величины устанавливаются специальными правилами — нормами.

Для всех материалов кроме стали допускаемые напряжения приняты как некоторая часть предела прочности.

Отношение величины предела прочности R к величине допускаемого напряжения σ называется запасом прочности или коэффициентом запаса и обозначается буквой n :

$$n = \frac{R}{\sigma}.$$

Например допускаемое напряжение для сосны на растяжение $\sigma = 100 \text{ кг/см}^2$; предел прочности для сосны $R = 700 \text{ кг/см}^2$; коэффициент запаса $n = \frac{700}{100} = 7$. Допускаемые напряжения для стали установлены как часть предела текучести.

Допускаемое напряжение на растяжение и сжатие для Ст.-3 принято $\sigma = 1400 \text{ кг/см}^2$.

Предел текучести равен 2500 кг/см^2 ;

Коэффициент запаса $n = \frac{2500}{1400} = 1,8$.

§ 5. РАСЧЕТ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Расчет на растяжение и сжатие заключается в решении двух видов задач:

1) Даны нагрузка P и допускаемое напряжение σ . Найти площадь поперечного сечения элемента F .

Для решения этой задачи воспользуемся формулой (1) $\sigma = \frac{P}{F}$; из этой формулы находим:

$$F = \frac{P}{\sigma}. \quad (4)$$

2) Даны площадь поперечного сечения элемента F и допускаемое напряжение σ . Найти допускаемую нагрузку P .

Эту нагрузку определим также на основании формулы (1):

$$P = F\sigma. \quad (5)$$

Пример 1. Круглая железная подвеска длиной $l = 3,00 \text{ м}$ растянута нагрузкой в 5000 кг (рис. 117). Допускаемое напряжение на растяжение $\sigma = 1250 \text{ кг/см}^2$.

Определить прочное сечение подвески.

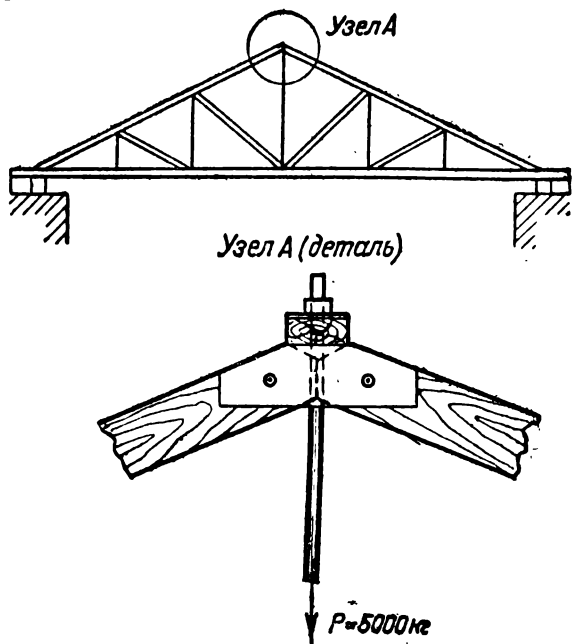


Рис. 117. Стропильная ферма с металлическими подвесками.

Решение. а) Площадь сечения подвески определим по формуле (4):

$$F = \frac{5\,000 \text{ кг}}{1\,250 \text{ кг/см}^2} = 4 \text{ см}^2.$$

Диаметр подвески получим из равенства:

$$\frac{\pi d^2}{4} = 4 \text{ см}^2.$$

Отсюда $d = 22,5 \text{ мм}$.

Пример 2. Трос подъемника состоит из 160 проволок диаметром 1 мм каждая. Допускаемое напряжение проволоки на растяжение:

$$\sigma = 14 \text{ кг/мм}^2.$$

Определить наибольший допускаемый к подъему груз.

Решение. Суммарное сечение проволок троса:

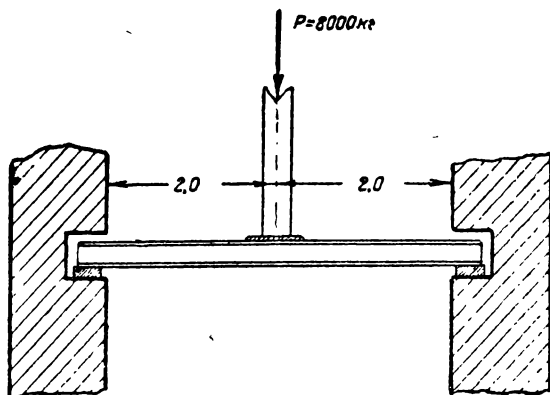
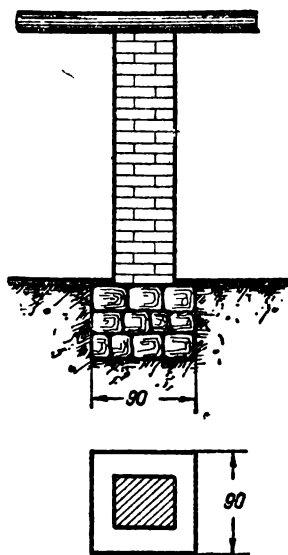


Рис. 118. Опоры стальной балки.

Рис. 119. Фундамент каменного столба.

$$F = 160 \frac{\pi d^2}{4} = \frac{160 \cdot 3,14 \cdot 1}{4} = 125,6 \text{ мм}^2.$$

Наибольшую нагрузку определим по формуле (5), подставляя в нее имеющиеся данные:

$$P = F\sigma = 125,6 \cdot 14 = 1\,758,4 \text{ кг}.$$

Пример 3. Двутавровая балка опирается концами на кирпичные стены (рис. 118). Нагрузка $P = 8\,000 \text{ кг}$ приложена в середине балки. Давление на каждую из опор составит $4\,000 \text{ кг}$. Допускаемое напряжение кладки на сжатие 10 кг/см^2 .

Определить необходимую площадь опорания.

Решение. Необходимая площадь определяется по формуле (4):

$$F = \frac{P}{\sigma} = \frac{4\,000 \text{ кг}}{10 \text{ кг/см}^2} = 400 \text{ см}^2.$$

Пример 4. Кирпичный столб передает на грунт нагрузку $8\,100 \text{ кг}$ (рис. 119).

Определить размеры фундамента столба, если грунт под ним допускает напряжения на сжатие $\sigma = 1 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Определяем площадь основания по формуле (4):

$$F = \frac{P}{\sigma} = \frac{8100 \text{ кг}}{1 \text{ кг/см}^2} = 8100 \text{ см}^2.$$

Фундаменты под столбы делаются обычно квадратные.

Размер стороны фундамента:

$$a = \sqrt{8100} = 90 \text{ см.}$$

Пример 5. Кирпичный столб высотой 2,5 м имеет сечение $51 \times 51 \text{ см}$ (т. е. 2×2 кирпича).

Допускаемое напряжение кладки на сжатие 10 кг/см^2 .

Определить наибольшую допускаемую нагрузку.

Решение. Площадь поперечного сечения столба:

$$F = 51 \cdot 51 = 2601 \text{ см}^2.$$

Наибольшую допускаемую нагрузку определим по формуле (5):

$$P = F\sigma = 2601 \cdot 10 = 26010 \text{ кг.}$$

§ 6. СМЯТИЕ

Если сжатие происходит на небольшом участке какого-нибудь тела или на поверхности двух соприкасающихся тел, то оно называется смятием.

Например смятие происходит в соединении балки и поддерживающей ее стойки (рис. 120); стропильная нога, врубленная в затяжку, производит смятие на поверхности $I-I$ (рис. 122).

Для всех материалов кроме дерева допускаемые напряжения на смятие равны допускаемым напряжениям на сжатие или выше их.

Для дерева допускаемые напряжения на смятие принимаются в зависимости от направления усилия.

Например, когда усилие направлено вдоль волокон, допускается 80 кг/см^2 ; при смятии поперек волокон $15-20 \text{ кг/см}^2$. Если усилие имеет какое-нибудь промежуточное направление между двумя указанными, то и для допускаемого напряжения принимают некоторое промежуточное значение, установленное опытом. Определение необходимых размеров элементов, работающих на смятие, производится по формуле (4):

$$F = \frac{P}{\sigma},$$

где σ — допускаемое напряжение на смятие.

Пример 1. Брусья стропильной затяжки, соединенные прямым замком, растягиваются силой $P = 3600 \text{ кг}$ (рис. 121). Сечение

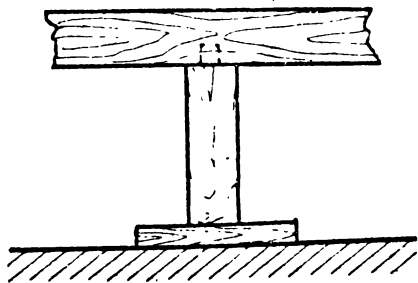


Рис. 120. Соединение деревянной балки и стойки.

брусьев 18×14 см. На плоскости $a-b$ происходит деформация смятия, направленная вдоль волокон. Допускаемое напряжение $\sigma = 80 \text{ кг/см}^2$.

Определить глубину врубки.

Решение. Необходимую площадь врубки находим по формуле (4):

$$F = \frac{P}{\sigma} = \frac{3600 \text{ кг}}{80 \text{ кг/см}^2} = 45 \text{ см}^2.$$

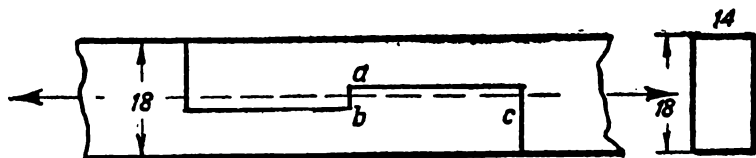


Рис. 121. Врубка прямым замком.

Ширина бруса 14 см; глубина врубки a составит:

$$a = \frac{45}{14} = 3,2 \text{ см.}$$

Принимаем с округлением 3,5 см.

Пример 2. В стропильной ноге (рис. 122) действует сила $P = 5000$ кг. Определить необходимую глубину врубки, если допускаемое напряжение на смятие под углом в 30° равно 40 кг/см^2 .

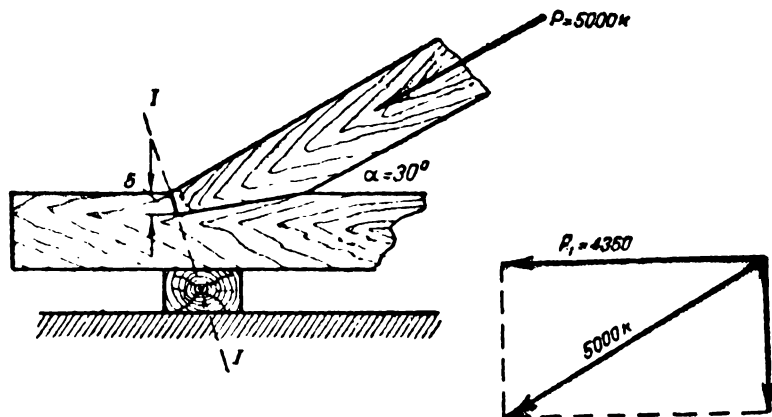


Рис. 122. Врубка зубом.

Решение. Разложим данную силу на две составляющих: P_1 — направленную горизонтально и P_2 — направленную вертикально. По масштабу определяем, что $P_1 = 4350$ кг. Сила P_1 производит смятие врубки.

Необходимая площадь врубки:

$$F = \frac{P}{\sigma} = \frac{4350 \text{ кг}}{40 \text{ кг/см}^2} = 109 \text{ см}^2.$$

При ширине бруса, равной 22 см, получим необходимую глубину врубки:

$$a = \frac{109 \text{ см}^2}{22 \text{ см}} = 5 \text{ см.}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте закон Гука для растяжения.
2. Что такое модуль упругости?
3. Дайте определение пределов пропорциональности и упругости.
4. Как устанавливают допускаемые напряжения?
5. Сформулируйте закон Гука для сжатия.
6. Какой материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию?
7. Назовите примеры смятия в деревянных соединениях.
8. Напишите формулу для определения сечения, обеспечивающего прочность растянутого бруса.

Глава 2. СДВИГ

Рассмотрим два вида сдвига: срез и скалывание.

§ 1. СРЕЗ

Деформация сдвига наблюдается при разрезании арматурного железа на механическом прессе. Разрезаемый стержень *A* (рис. 123) лежит на нижнем неподвижном ноже пресса *B*, а сверху надавливает подвижной нож *C*; таким образом на стержень действуют противоположные силы *P*, весьма близкие одна к другой. При увеличении этих сил получится срез, т. е. разрушение по сечению, лежащему между силами *P*. Это разрушение происходит сразу по всей плоскости сечения. В этом явлении характерны, во-первых, незначительное расстояние между силами *P* и, во-вторых, одновременное нарушение сцепления частиц по смежным поперечным сечениям. Эти сечения перемещаются (сдвигаются) одно относительно другого.

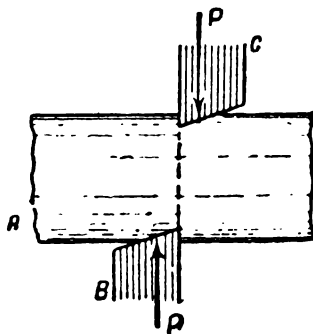


Рис. 123. Разрезание арматурного железа.

Многие соединения частей сооружений подвергаются действию сдвигающих усилий. Так например, в болтовых или заклепочных соединениях (рис. 124) растягивающие силы передаются на болты или заклепки и могут срезать их по сечению *a—a*, если размеры сечения недостаточны для сопротивления.

Заклепки и болты, подвергающиеся перерезыванию в одном сечении, называются односрезными.

Соединение внахлестку (рис. 124) с односрезными заклепками обладает тем недостатком, что при растяжении соединение перекашивается (рис. 125).

Этого можно избежать, если соединяемые листы довести вплотную один к другому и перекрывать их с обеих сторон наклад-

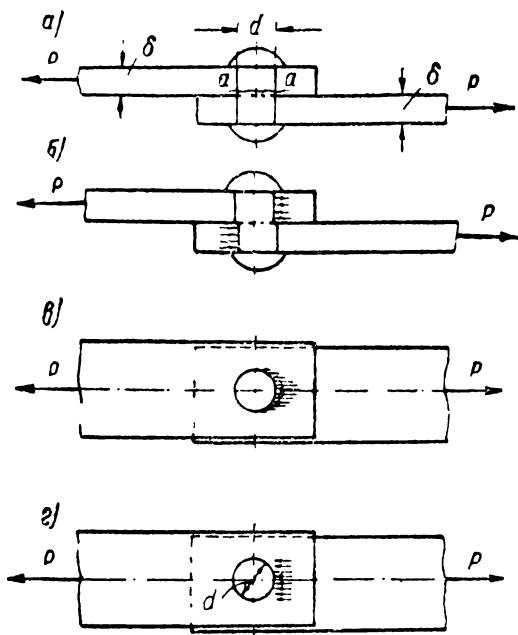


Рис. 124. Работа заклепок:

a — одна плоскость среза; b — срез и смятие; v — фактическое распределение напряжений смятия; z — условно принимаемое распределение напряжений смятия.

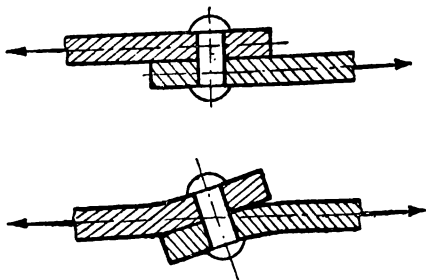


Рис. 125. Искривление соединения внахлестку.

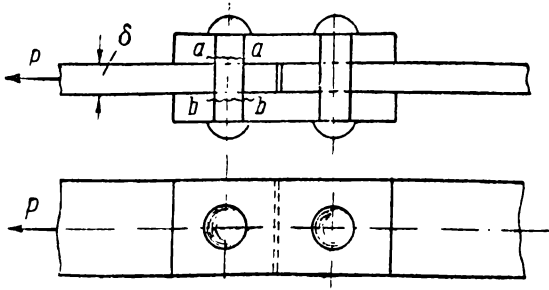


Рис. 126. Соединение посредством накладок (срезные заклепки).

ками (рис. 126). Под действием сил здесь происходит срезывание заклепок (или болтов) по двум сечениям $a-a$ и $b-b$. Такие заклепки или болты называются двухсрезными; площадь срезывания в них удваивается.

Материалы в большинстве своем сопротивляются сдвигу слабее, чем растяжению.

Допускаемое напряжение t на срез для стали принимается обычно 0,75—0,8 допускаемого напряжения на растяжение.

Следовательно

$$t = 0,8 \cdot 1400 = 1120 \text{ кг/см}^2.$$

Определение площади поперечного сечения на срез производится по формуле:

$$F = \frac{P}{t}, \quad (6)$$

где t — допускаемое напряжение на срез.

В соединениях, указанных выше, одновременно с перерезыванием происходит смятие на поверхности соприкосновения заклепки и листа (рис. 124, б). Обычно заклепки делают из металла более мягкого, чем соединяемые листы, поэтому может произойти смятие заклепки, а не листа.

Смятие происходит по полуокружности (в плане) и распре-

деляется неравномерно; в средней части полуокружности будет наибольшее смятие, по краям наименьшее. На рис. 124, в это показано штриховкой. Для упрощения расчета принимают, что смятие происходит равномерно по площади диаметрального сечения (рис. 124, г).

Опытами установлено, что напряжение смятия при этом можно принять равным удвоенной величине допускаемого напряжения на сжатие, т. е. $2 \cdot 1400 = 2800 \text{ кг/см}^2$.

Пример 1. Две полосы толщиной по 10 мм каждая соединены внахлестку и растягиваются силой $P = 4500 \text{ кг}$.

Допускаемое напряжение на срез $t = 1120 \text{ кг/см}^2$,

Определить из условия прочного сопротивления на срез необходимое число заклепок диаметром 16 мм.

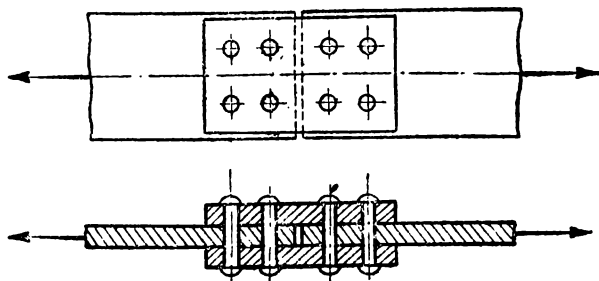


Рис. 127. Соединение посредством накладок.

Решение. Определим необходимую площадь сечения заклепок по формуле (6):

$$F = \frac{P}{t} = \frac{4500 \text{ кг}}{1120 \text{ кг/см}^2} = 4 \text{ см}^2.$$

Площадь сечения одной заклепки:

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 1,6^2}{4} = 2,0 \text{ см}^2.$$

Принимаем две заклепки.

Проверим, обеспечено ли прочное сопротивление смятию. Необходимая площадь смятия:

$$F_{см} = \frac{4500 \text{ кг}}{2800 \text{ кг/см}^2} = 1,5 \text{ см}^2.$$

В двух заклепках площадь смятия составляет:

$$2 \cdot 1,6 \text{ см} \cdot 1 \text{ см} = 3,2 \text{ см}^2,$$

т. е. значительно превосходит необходимую.

Пример 2. Два листа (толщиной по 10 мм каждый) перекрываются в стыке двумя накладками и растягиваются силой в 18000 кг (рис. 127).

Определить из условия прочного сопротивления перерезыванию необходимое число заклепок диаметром 16 мм.

Решение. Определим необходимую площадь сечения заклепок для каждой половины стыка:

$$F = \frac{P}{t} = \frac{18000 \text{ кг}}{1120 \text{ кг/см}^2} = 16 \text{ см}^2.$$

Площадь сечения одной заклепки — 2 см^2 (см. предыдущий пример).

Каждая заклепка сопротивляется перерезыванию по двум сечениям (двухсрезные заклепки). Находим необходимое число заклепок для каждой половины стыка:

$$n = \frac{16 \text{ см}^2}{2 \cdot 2 \text{ см}^2} = 4.$$

Проверим, обеспечено ли прочное сопротивление смятию. Необходимая площадь смятия:

$$F_{см} = \frac{18000 \text{ кг}}{2800 \text{ кг/см}^2} = 6,4 \text{ см}^2.$$

В четырех заклепках площадь смятия составляет:

$$4 \cdot 1,6 \text{ см} \cdot 1 \text{ см} = 6,4 \text{ см}^2.$$

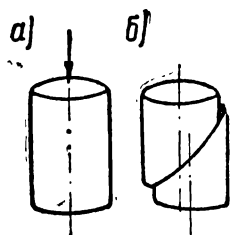


Рис. 128. Разрушение образца от сдвига при сжатии.

Следовательно прочность на смятие также обеспечена. В противном случае пришлось бы увеличить диаметр заклепок или число их.

Растягивающие и сжимающие напряжения направлены нормально (перпендикулярно) к поперечному сечению. Поэтому эти напряжения носят общее название нормальных.

В противоположность нормальным напряжениям напряжения сдвига действуют в плоскости поперечного сечения.

На рис. 128,а показан чугунный образец, предназначенный для испытания на раздавливание. Разрушение его часто происходит, как показано на рис. 128,б. Поверхности излома скользят одна по другой. Отсюда следует, что действие нормальных напряжений вызывает появление напряжений сдвига.

На рис. 129 изображен стальной образец, предназначенный для испытания. В разрывной машине его напряжение постепенно увеличивают. Еще до образования шейки на поверхности образца возникают косые бороздки, как это показано на рис. 129,а.

Таким образом в наклонных сечениях происходит взаимное скольжение мельчайших частиц железа. Бороздки на поверхности образца указывают на расхождение плоскостей сдвига. Значит, в растянутом образце остаточные деформации получаются от сдвига.

Бороздки образуют с направлением оси стержня угол в 45° . Следовательно эти линии взаимно перпендикулярны.

Если обозначить через F поперечное сечение испытуемого образца, то площадь сечения, наклоненного под углом 45° к оси образца, будет $F\sqrt{2}$. На рис. 129,б сила P разложена на две, из которых одна (S) действует в показан-

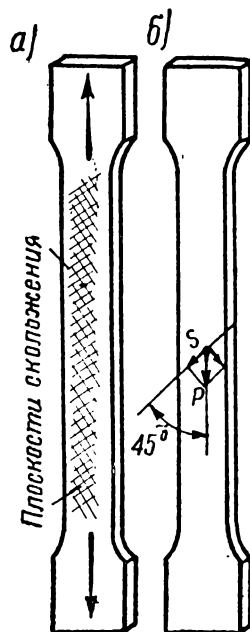


Рис. 129. Сдвиг при растяжении.

ной на чертеже плоскости наклонного сечения, а другая — в плоскости, ей перпендикулярной.

Сила P представляет диагональ квадрата, сторона которого S составит:

$$S = \frac{P}{\sqrt{2}}.$$

Сила S вызывает в наклонном сечении скалывающие напряжения:

$$t = \frac{S}{F \sqrt{2}} = \frac{P}{F \sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{P}{F \cdot 2}.$$

Здесь $\frac{P}{F}$ обозначает растягивающее напряжение σ в поперечном сечении.

Получаем:

$$t = \frac{\sigma}{2}.$$

Отсюда следует, что теоретически допускаемые напряжения на сдвиг надо принимать равными половине допускаемого напряжения на сжатие. Однако практика показала, что для стали без ущерба для прочности можно принять допускаемое напряжение на сдвиг равным 0,75—0,8 допускаемого напряжения на сжатие. Последнее соотношение и было дано выше.

§ 2. СКАЛЫВАНИЕ

Вследствие слабой связи между отдельными волокнами дерева сдвиг, действующий вдоль волокон, имеет особый вид и называется скалыванием.

Во многих деревянных частях сооружений действуют силы, стремящиеся произвести скалывание.

Например в соединении, рассмотренном в главе 1, § 6 (рис. 121), может произойти скалывание зубьев по плоскостям, указанным на рис. 121 пунктиром.

Замечено, что с увеличением длины зуба, сопротивление разрушению сначала растет пропорционально площади скалывания, т. е. пропорционально длине bc ; это происходит до тех пор, пока длина bc не делается равной девятикратной глубине врубки ab . За этим пределом сопротивление не возрастает с увеличением длины, а остается постоянным. Причина этого заключается в том, что длинные зубья не скалываются сразу по всей длине, а отдираются постепенно.

Поэтому увеличение длины зуба сверх указанного предела не приносит пользы.

Сопротивление дерева скалыванию незначительно и во много раз меньше сопротивлений на растяжение и сжатие.

Соответственно этому и допускаемое напряжение на скалывание очень невелико; например для сосны принимается $t = 12 \text{ кг/см}^2$. Вследствие скалывания дерево представляет собой не подходящий материал для выдерживания растягивающих усилий, хотя сопротивление волокон дерева на разрыв достаточно велико.

Действительно, чтобы приложить растягивающее усилие к деревянному бруску, нужно сделать на конце бруска какое-нибудь соединение, в котором и появляется скалывание.

Определение прочных размеров на скалывание производится по формуле (6) $F = \frac{P}{t}$, где t — допускаемое напряжение на скалывание.

Пример 1. Для соединения брусьев стропильной затяжки, рассмотренного в главе 1, § 6, определить необходимую длину зуба. Допускаемое напряжение на скалывание $t = 12 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Необходимую площадь сопротивления скалыванию определим по формуле (6):

$$F = \frac{P}{t} = \frac{3600 \text{ кг}}{12 \text{ кг/см}^2} = 300 \text{ см}^2.$$

Необходимая длина l зуба:

$$l = \frac{300 \text{ см}^2}{12 \text{ см}} = 25 \text{ см}.$$

Пример 2. В соединении стропильной ноги с затяжкой (рис. 122) усилие $P = 4350 \text{ кг}$ стремится не только смять врубку, но и сколоть верхнюю часть конца затяжки. Определить необходимую длину этого конца. Допускаемое напряжение на скалывание $t = 12 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Определяем необходимую площадь сопротивления скалыванию по формуле (6):

$$F = \frac{P}{t} = \frac{4350 \text{ кг}}{12 \text{ кг/см}^2} = 362 \text{ см}^2.$$

При ширине бруса в 22 см получим длину конца затяжки:

$$l = \frac{362 \text{ см}^2}{22 \text{ см}} = 16 \text{ см}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие явления характерны для перерезывания?
2. Напишите расчетную формулу для определения прочного сечения на перерезывание.
3. Когда заклепки называются односрезными и двухсрезными?
4. Какая деформация часто сопутствует срезыванию?
5. Что называют скалыванием?
6. В чем заключается расчет на скалывание?

Глава 3. ИЗГИБ

Изгиб можно осуществить различными способами, например положить балку на две опоры и нагрузить ее посредине (рис. 130) или, укрепив один конец балки, нагрузить ее на свободном конце (рис. 131).

Подобные случаи изгиба широко распространены на практике. Для последовательного изучения изгиба рассмотрим действие внешних сил, производящих изгиб; общий характер деформации; напряжения, возникающие в балке. В заключение перейдем к расчету изгибаемых элементов.

§ 1. ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ И ПОПЕРЕЧНАЯ СИЛА

Положим брусок на две опоры и нагрузим его посредине силой P (рис. 132). Реакции опор будут $\frac{P}{2}$.

В статике было доказано, что данные силы могут быть приведены к равнодействующей силе, приложенной в намеченной точке, и к паре, момент которой равен сумме моментов дан-

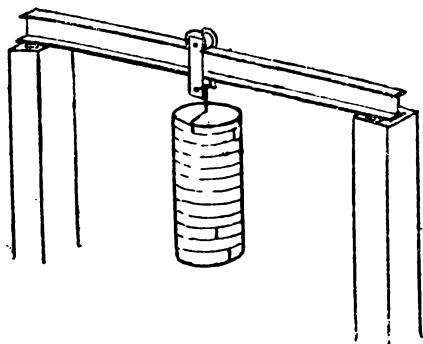


Рис. 130. Балка на двух опорах, нагруженная посредине.

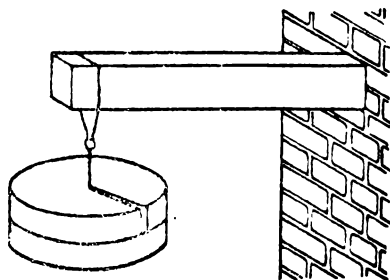


Рис. 131. Балка, заделанная одним концом.

ных сил. Возьмем какое-нибудь сечение $I-I$ и перенесем в его центр тяжести силу $\frac{P}{2}$. Для этого приложим в сечении две равные и противоположные силы $\frac{P}{2}$, отчего равновесие балки

не нарушится. Рассматривая затем силы, действующие слева от сечения $I-I$, найдем, что там действует пара сил с моментом $M = \frac{P}{2} x$, выгибающим брусок выпуклостью вниз, и сила $\frac{P}{2} = Q$, которая стремится сдвинуть левую часть балки вверх. Таким образом внешние силы, действующие левее сечения, приведены к паре и силе.

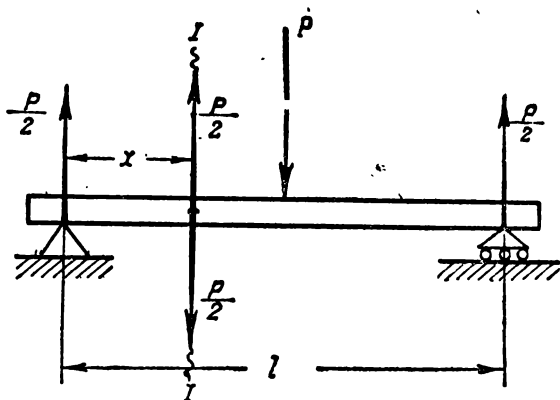


Рис. 132. Определение изгибающего момента и поперечной силы в балке на двух опорах.

Сечение было выбрано произвольно, а потому выведенное заключение является общим. Применим тот же прием к бруску, заделанному одним концом (рис. 133). В бруске левее сечения $I-I$ действуют пара с моментом $M = Px$, выгибающим брусок, и срезающая сила Q , сдвигающая левую часть балки вниз.

Момент M называется изгибающим моментом. Он равен алгебраической сумме моментов сил, действующих на левую часть балки относительно центра сечения.

Сила Q называется поперечной или перерезывающей силой. Она равна алгебраической сумме сил, приложенных к левой части балки.

Условимся считать изгибающий момент положительным, если он изгибает балку в рассматриваемом сечении выпуклостью вниз (рис. 134, а).

В случае отрицательного изгибающего момента имеет место обратное явление: балка обращена выпуклой стороной вверх (рис. 134, б).

Поперечную силу будем считать положительной, если она направлена вверх.

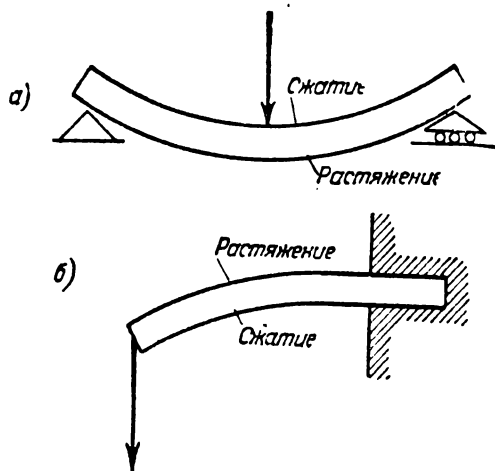


Рис. 134. Растяжение и сжатие волокон:
а — балка на двух опорах; б — балка, заделанная одним концом.

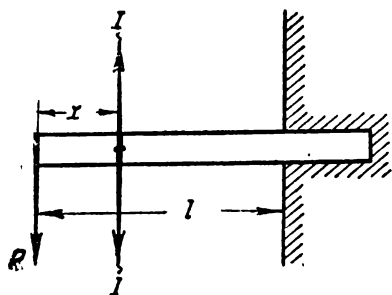


Рис. 133. Определение изгибающего момента и поперечной силы в балке, заделанной одним концом.

Если для вычисления изгибающего момента и поперечной силы принимают силы, действующие справа от рассматриваемого сечения, то правило знаков, изложенное выше, изменяют на противоположное.

Изменение величины изгибающего момента по всей длине балки можно изобразить графически. Проведем горизонтальную ось и на ней отложим вертикальные отрезки, изображающие в масштабе величины моментов, вычисленные для нескольких сечений; затем соединим концы отрезков (рис. 135). Полученный график называется эпюрой изгибающих моментов M . Эпюра дает возможность непосредственным измерением определить по масштабу величину момента в любом сечении балки.

Для этой же цели эпюра заштрихована тесно расположенными вертикальными штрихами.

Надо иметь в виду, что при построении эпюры M откладывают величины положительных изгибающих моментов вниз от оси, а величины отрицательных моментов — вверх от оси. Положительную эпюру Q откладывают вверх от оси, отрицатель-

ную — вниз (т. е. в ту сторону, в которую направлена поперечная сила).

Пример. Балка длиной $l=6$ м нагружена в середине пролета силой $P=800$ кг (рис. 135). Найти опорные реакции и построить эпюры M и Q .

Решение. Опорные реакции определяются из условий симметрии:

$$A = B = \frac{P}{2} = \frac{800}{2} = 400 \text{ кг.}$$

Рассмотрим сечение $I-I$ в левой части балки на расстоянии x от левой опоры. Изгибающий момент в этом сечении равен моменту всех сил, приложенных к левой части балки. В данном случае слева действует одна сила $A = \frac{P}{2}$. Поэтому изгибающий момент определится по формуле:

$$M_x = Ax = \frac{P}{2} x.$$

Вычислим изгибающие моменты для нескольких сечений балки, расположенных на равных промежутках: на опоре $x=0$; изгибающий момент $M = \frac{P}{2} \cdot 0 = 0$;

на расстоянии $x=0,75$ м $M = \frac{P}{2} \cdot 0,75 = 400 \cdot 0,75 = 300$ кгм,

„ „ $x=1,50$ „ $M = \frac{P}{2} \cdot 1,5 = 400 \cdot 1,5 = 600$ кгм,

„ „ $x=2,25$ „ $M = \frac{P}{2} \cdot 2,25 = 400 \cdot 2,25 = 900$ кгм,

„ „ $x=3,0$ „ $M = \frac{P}{2} \cdot 3,0 = 400 \cdot 3,0 = 1200$ кгм.

Изгибающие моменты правой половины балки соответственно равны найденным выше, но направлены в противоположную сторону. Обе группы моментов обуславливают изгиб балки выпуклостью вниз.

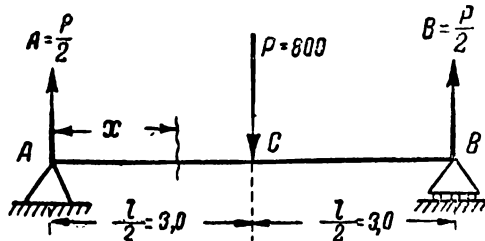
Проведем горизонтальную ось под схемой балки; наметим места сечений и в них отложим отрезки, изображающие величины моментов (рис. 135).

Получим эпюру изгибающих моментов в виде равнобедренного треугольника. Его вершина соответствует середине балки, где приложена сила P . Здесь действует наибольший изгибающий момент.

Теперь обратимся к построению эпюры поперечных сил Q . Поперечная сила равна сумме сил, действующих слева от рассматриваемого сечения. В нашем случае имеется только одна сила $Q_{лев} = \frac{P}{2} = 400$ кг, которая остается неизменной для любого

сечения, на участке балки AC . В правой половине балки поперечная сила также постоянна по величине:

$$Q_{\text{прав}} = -\frac{P}{2} = -400 \text{ кг.}$$



На основании полученных данных строим эпюру поперечных сил Q (рис. 135).

§ 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ВОЛОКОН ИЗГИБАЕМОЙ БАЛКИ

Предположим, что балка состоит из продольных волокон, соединенных друг с другом. Это предположение вполне соответствует строению древесины, а для других материалов является условным.

Еще во времена Галилея исследователи обнаружили, что на выпуклой стороне изгибаемой балки волокна растягиваются. На основании этого решили, что вообще все волокна балки в большей или меньшей степени растянуты. Только во второй половине XVIII столетия французский ученый Дюгамель посредством простого опыта доказал, что на вогнутой стороне балки всегда происходит сжатие.

Опыт Дюгамеля заключался в следующем.

Взял несколько брусков одинаковых размеров; в некоторых брусках сделали пропилы (рис. 136, a), доходившие до $\frac{1}{2}$ высоты бруска, и плотно заполнили их деревянными пластинками.

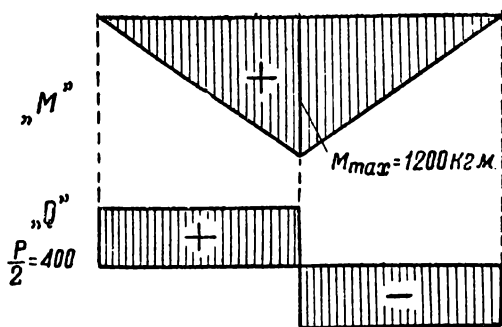


Рис. 135. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил балки на двух опорах, нагруженной посередине.

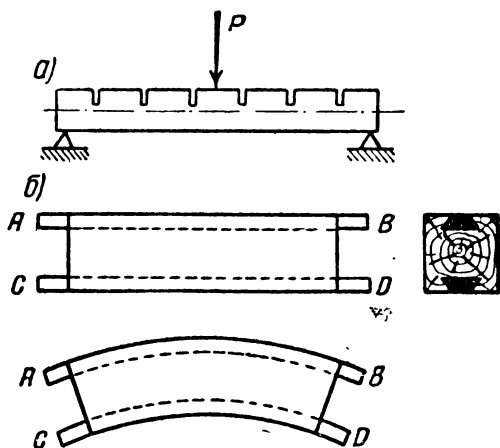


Рис. 136. Определение растяжения и сжатия волокон:

a — опыт Дюгамеля; b — опыт Морена.

Бруски подвергались загрузке, причем пропилы находились на вогнутой стороне. Если на этой стороне происходит

растяжение, то надпиленные бруски должны оказаться значительно слабее цельных, так как надпиленная часть бруска не способна сопротивляться растяжению. Но сжатие передается в надпиленных брусках через пластинки, заполняющие надрезы, так же хорошо, как и в цельных брусках. Поэтому, если на вогнутой стороне происходит сжатие, то надпиленные бруски должны оказаться настолько же прочными, как и цельные.

Это подтвердилось и следовательно было установлено, что на вогнутой стороне изгибаемого бруска происходит сжатие, а не растяжение.

Существование такого сжатия было впоследствии установлено ученым Мореном, который непосредственно измерил изме-

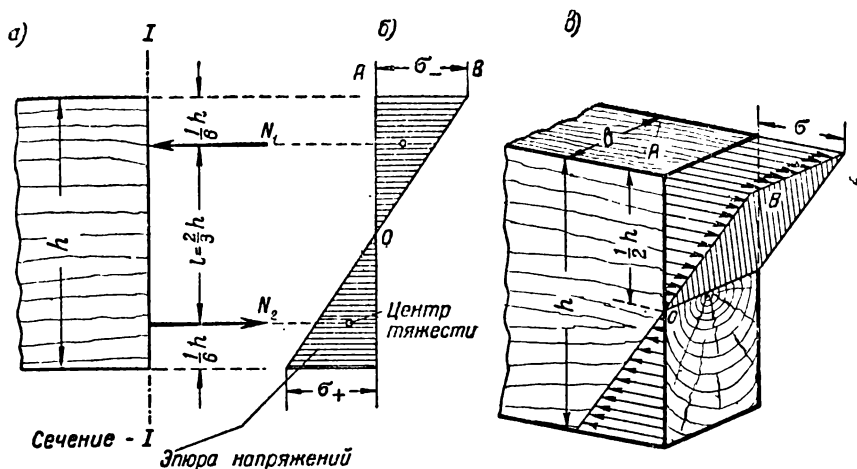


Рис. 137. Внутренние силы балки при изгибе:

a — равнодействующие внутренних сил; b — эпюры напряжений; $в$ — объемные диаграммы напряжений.

нения длины волокон. Для этой цели в деревянном бруске вдоль верхней и нижней граней были сделаны неглубокие пазы, в которые вставлялись тонкие деревянные рейки AB и CD (рис. 136, б). При изгибе концы рейки CD , расположенной на вогнутой стороне бруска, выдвигались наружу на величину сжатия (здесь происходящего), а концы рейки AB , расположенной на выпуклой стороне, втягивались в пазы на величину удлинения. Эти перемещения реек тщательно измерялись. Результаты опытов показали, что удлинения и сжатия для однородных брусков симметричного сечения равны между собой и пропорциональны силам.

Если длина волокон, лежащих на выпуклой стороне бруска, увеличивается, а на вогнутой уменьшается, то по середине высоты бруска должны быть такие волокна, длина которых при изгибе не изменяется. Эти неизменные по длине волокна образуют поверхность, которая называется нейтральным слоем.

Удлинения и укорочения волокон тем больше, чем больше расстояние их от нейтрального слоя. В растянутых волокнах

развиваются растягивающие напряжения; в сжатых волокнах возникают сжимающие напряжения.

Так как напряжения растяжения и сжатия пропорциональны удлинению и укорочению волокон, то величины напряжений в волокнах изгибаемого бруска изменяются пропорционально расстоянию волокон от нейтрального слоя.

Изменение величины нормальных напряжений по высоте сечения можно изобразить графически. Для этого из середины каждой весьма малой площади поперечного сечения откладывают перпендикулярно к ней соответствующую величину напряжения. Растягивающие напряжения обозначаются знаком плюс (+), сжимающие — знаком минус (—).

Величины сжимающих напряжений откладываются в одну сторону, растягивающих — в другую. Получается объемная диаграмма в виде двух клиньев (трехгранных призм), изображенная на рис. 137. Так как по ширине сечения напряжения одинаковы, то можно вместо объемной дать плоскую диаграмму (эпюру) в виде двух треугольников (рис. 137, б), которая характеризует изменение напряжений по высоте сечения бруса (рис. 137, а).

§ 3. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Внутренние силы (напряжения) балки должны находиться в равновесии с внешними приложенными к ней силами.

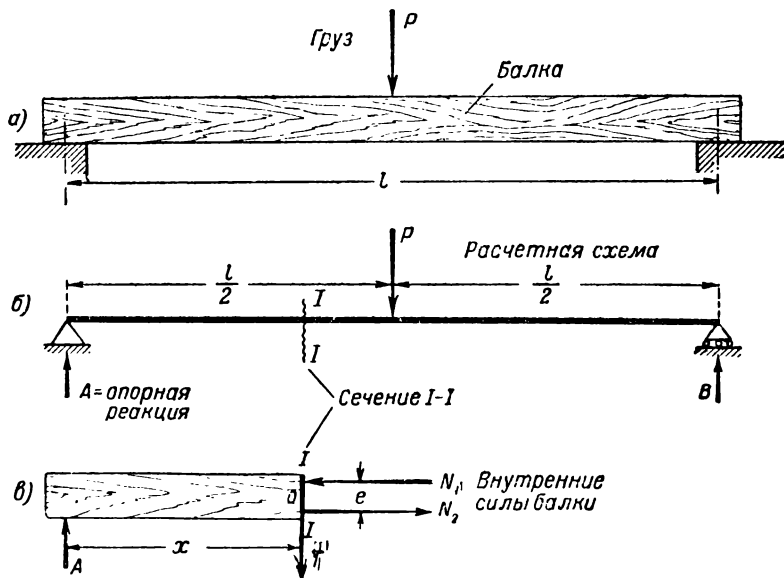


Рис. 138. Определение внутренних сил балки при изгибе.

Представим себе, что балка разделена на две части поперечным сечением I—I и отбросим мысленно правую часть балки (рис. 138). Чтобы часть балки осталась в равновесии, к ней надо приложить в плоскости сечения такие силы, кото-

рые произведут то же действие, что и существовавшие до разделения балки внутренние силы (напряжения).

К оставленной части применим общие условия равновесия, указанные в статике. А именно:

1. Алгебраическая сумма вертикальных проекций сил должна равняться нулю ($\Sigma Y = 0$).

2. Алгебраическая сумма горизонтальных проекций сил должна равняться нулю ($\Sigma X = 0$).

3. Алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки должна равняться нулю ($\Sigma M = 0$).

На основании первого условия получим, что в проведенном поперечном сечении должна существовать направленная сверху вниз вертикальная сила T .

Эта сила препятствует сдвигу рассматриваемой части балки по плоскости сечения, т. е. действует как сопротивление поперечной силе Q , направленной снизу вверх.

Итак:

$$Q - T = 0 \quad \text{или} \quad Q = T.$$

Сила T представляет собой равнодействующую перерезывающих напряжений, развивающихся в плоскости сечения. Значение этих напряжений — второстепенное. Главную роль при изгибе играют нормальные напряжения. Перейдем к их рассмотрению.

Горизонтальными силами, приложенными к рассматриваемой части балки, являются только нормальные сжимающие и растягивающие напряжения.

Обозначим сумму сжимающих напряжений буквой N_1 и сумму растягивающих — буквой N_2 . Тогда на основании второго условия равновесия $N_1 - N_2 = 0$, откуда $N_1 = N_2$, т. е. растягивающие напряжения равны сжимающим.

На основании третьего условия равновесия момент M внешней силы P должен быть равным сумме моментов всех внутренних сил, или, что одно и то же, моменту их равнодействующих, причем последние стремятся вращать балку влево (рис. 138).

Пользуясь диаграммой напряжений (рис. 137), определим величину равнодействующих растягивающих и сжимающих внутренних сил и расстояние между ними.

Рассмотрим верхнюю половину диаграммы (рис. 137, в). Она представляет собой призму с треугольным основанием AOB . Объем такой призмы равен произведению площади основания AOB на высоту b .

Площадь треугольника AOB равна половине произведения сторон σ и $\frac{h}{2}$, т. е.

$$\Delta AOB = \frac{\sigma h}{4}.$$

Следовательно объем призмы равен $\frac{\sigma h b}{4}$.

Мы узнали сумму внутренних сил сжатия. Все эти силы параллельны; поэтому равнодействующая N_1 равна их сумме и приложена в центре тяжести призмы на расстоянии $\frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$ от нейтральной оси (рис. 137, а).

Равнодействующая N_2 растягивающих сил также равна $\frac{\sigma h b}{4}$ и тоже находится на расстоянии $\frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$ от нейтральной оси, причем эта равнодействующая направлена в противоположную сторону.

Таким образом мы получили пару сил (N_1, N_2). Плечо этой пары

$$\frac{h}{3} + \frac{h}{3} = \frac{2}{3} h.$$

Момент пары (N_1, N_2) равен:

$$\frac{\sigma h b}{4} \cdot \frac{2}{3} h = \sigma \frac{bh^2}{6}.$$

Направление момента пары противоположно направлению изгибающего момента M .

Оба момента должны быть между собой равны, значит

$$M - \sigma \frac{bh^2}{6} = 0 \quad \text{или} \quad M = \sigma \frac{bh^2}{6}.$$

Выражение $\frac{bh^2}{6}$ называется моментом сопротивления прямоугольного сечения балки и обозначается буквой W .

Следовательно

$$M = \sigma W. \quad (7)$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{M}{W}, \quad (8)$$

т. е. напряжение σ крайних волокон сечения определится в результате деления величины изгибающего момента на величину момента сопротивления.

Балка будет прочной, если напряжение крайних волокон ее не превосходит допускаемого напряжения, соответствующего величине допускаемых напряжений на растяжение и сжатие для данного материала.

Для деревянных балок допускаемое напряжение (на растяжение и сжатие) при изгибе $\sigma = 100 \text{ кг/см}^2$. Для стальных балок

$$\sigma = 1400 \text{ кг/см}^2.$$

Чем больше W , тем меньше в балке напряжения при одном и том же изгибающем моменте.

Высота балки h входит в момент сопротивления во второй степени. Поэтому из двух балок, имеющих одинаковые площади поперечного сечения, момент сопротивления больше у той балки, у которой больше высота.

Сравним моменты сопротивления двух балок сечением 12×20 см и 15×16 см:

$$W_1 = \frac{12 \cdot 20^2}{6} = 800 \text{ см}^3;$$

$$W_2 = \frac{15 \cdot 16^2}{6} = 640 \text{ см}^3.$$

Площади поперечных сечений этих балок равны, а разница между моментами сопротивления составляет:

$$\frac{800 - 640}{640} \cdot 100 = 25\%.$$

Напряжения в первой балке будут значительно меньше, чем во второй.

Понятно, что балку прямоугольного сечения необходимо класть „на ребро“, а не плашмя. Действительно, если первую балку уложить плашмя, то ее высота будет 12 см и следовательно

$$W = \frac{20 \cdot 12^2}{6} = 480 \text{ см}^3,$$

т. е. почти вдвое меньше 800 см³.

Выше мы видели, что в произвольном поперечном сечении балки обычно действует поперечная (срезающая) сила, вызывающая перерезывающие напряжения.

Напряжения сдвига в поперечных сечениях балки вызывают такие же напряжения и в сечениях, перпендикулярных им, т. е. в сечениях, параллельных нейтральному слою балки.

В этом можно убедиться на опыте. Например если заменить сплошной брус пакетом из досок, положенных друг на друга, но не соединенных между собой, то при изгибе такого пакета доски сдвинутся и концы пакета образуют ступенчатые поверхности. Этого не происходит при изгибе цельного бруса потому, что в горизонтальных плоскостях возникают напряжения, препятствующие сдвигу отдельных слоев бруса. При изгибе балки прямоугольного сечения напряжения сдвига достигают наибольшей величины у нейтрального слоя. Эта величина определяется по формуле:

$$t = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F}, \quad (9)$$

где Q — поперечная сила, F — площадь поперечного сечения.

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЧНОГО СЕЧЕНИЯ БАЛКИ

Преобразуем формулу (7) $M = \sigma W$ следующим образом:

$$W = \frac{M}{\sigma}. \quad (10)$$

Эта формула служит для определения размеров прочного сечения балки.

Зная величины M и σ , входящие в формулу (10), мы определим W .

Пример. Момент, изгибающий деревянную балку, равен 60 000 кгсм. Допускаемое напряжение $\sigma = 100$ кг/см². Найти прочное сечение балки.

Решение. Определим необходимый момент сопротивления балки:

$$W = \frac{M}{\sigma} = \frac{60000}{100} = 600 \text{ см}^3.$$

Допустим, что ширина бруса $b = 12$ см.

Подставляем эту величину в выражение момента сопротивления:

$$W = \frac{bh^3}{6} = \frac{12h^3}{6}.$$

Тогда

$$\frac{12h^3}{6} = 600;$$

отсюда

$$h = \sqrt[3]{300} \approx 18 \text{ см.}$$

Прочное сечение бруса 12×18 см.

§ 5. НАИВЫГОДНЕЙШЕЕ СЕЧЕНИЕ БРУСА. ДВУТАВРОВОЕ СЕЧЕНИЕ. СОСТАВНЫЕ БАЛКИ

Наивыгоднейшее сечение бруса

Брусчатые деревянные балки выпиливают из круглых бревен; наивыгоднейшим является сечение, в котором стороны относятся как 5:7 (рис. 139). Брус такого сечения окажет наибольшее сопротивление изгибу по сравнению с другими брусьями, которые возможно выпилить из данного бревна.

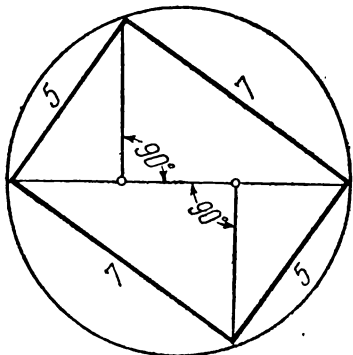


Рис. 139. Наивыгоднейшее сечение бруса.

Для правильной оценки этого обстоятельства нужно помнить, что оно относится к тому случаю, когда форма балки должна быть прямоугольная. Опиливая бревно для получения такой балки, удаляем значительную часть материала и получаем брус, сопротивление которого все же намного

меньше сопротивления бревна. Поэтому если нет необходимости иметь непременно прямоугольную балку, то лучше принять другие формы, более выгодные для сопротивления изгибу. Так например, балки, скрытые под полом, достаточно опилить или обтесать на два канта.

Двутапное сечение

Для лучшего использования материала необходимо придать поперечному сечению такую форму, в которой главная масса материала находится по возможности дальше от нейтрального слоя.

Показательным является следующий пример. На рис. 140, а, изображены три одинаковые доски шириной в 15 см и толщиной в 2 см, работающие каждая самостоятельно. Каждая из досок имеет момент сопротивления $W = 10 \text{ см}^3$, все три дают в сумме момент сопротивления $W = 30 \text{ см}^3$.

Если же эти доски соединить вместе, как показано на рис. 140, б, то, не считая даже сопротивления средней доски (стенки), поставленной на ребро, верхняя и нижняя доски (полки) дадут каждая момент сопротивления $W = 255 \text{ см}^3$, а обе полки вместе дадут момент сопротивления $W = 510 \text{ см}^3$, т. е. в 17 раз больше, чем те же три доски, работающие каждая отдельно.

Таким образом получается форма балки, которую можно представить себе составленной из двух Т и которая поэтому называется дву тавровой (рис. 143).

Чаще всего применяются стальные двутавровые балки. Практика выработала профили двутавровых стальных балок, имеющие наиболее целесообразные размеры. Эти профили соот-

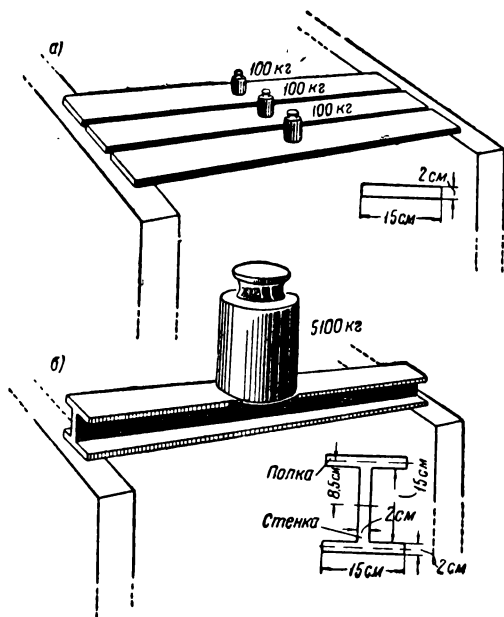


Рис. 140. Сравнение прямоугольного и двутаврового сечений.

Таблица 1

Балки двутавровые

№ профилей	Вес 1 пог. м в кг	Размеры в мм			Площадь сечения в см ²	J в см ⁴	W в см ³
		h	b	d			
10	11,2	100	68	4,5	14,3	245	49
12	14,0	120	74	5,0	17,8	436	72
14	16,9	140	80	5,5	21,5	712	102
16	20,5	160	88	6,0	26,1	1 130	141
18	24,1	180	94	6,5	30,6	1 660	185
20	27,9	200	100	7,0	35,5	2 370	237
22	33,0	220	110	7,5	42,0	3 400	309
24	37,4	240	116	8,0	47,7	4 570	381
27	42,8	270	122	8,5	54,6	6 550	485
30	48,0	300	126	9,0	61,2	8 950	597
33	53,4	330	130	9,5	68,1	11 900	721
36	59,9	360	136	10,0	76,3	15 760	875
40	67,6	400	142	10,5	86,1	21 720	1 090
45	80,4	450	150	11,5	102	32 240	1 430

ветственно их высоте обозначены номерами; величины их моментов инерции и сопротивления, вес 1 пог. м вычислены и даны в справочных таблицах. Одна из таких таблиц приведена выше (табл. 1).

Возьмем железный брус квадратного сечения 6×6 см. Площадь сечения $F = 36$ см²; момент сопротивления бруса $W = 36$ см³; вес 1 пог. м — 28 кг.

Двутавровая балка наименьшего сечения № 10 весит 11,2 кг/пог. м, площадь ее сечения $F = 14,3$ см², т. е. в 2,5 раза меньше, чем у бруса; момент сопротивления $W = 49$ см³, т. е. двутавр почти на 30% прочнее бруса.

Ту же площадь сечения, следовательно тот же вес, что и квадратный брус, имеет двутавр № 20; его момент сопротивления $W = 237$ см³, т. е. в 6 раз больше, чем у бруса.

Изложенное показывает экономию и повышение прочности, которые достигаются правильным распределением частиц материала в сечении.

Составные балки

Если нагрузить два бруса, свободно уложенных друг на друга, то в каждом из них (рис. 141, а), верхняя половина поперечного сечения будет сжата, а нижняя растянута.

Эпюра напряжений их представляет собой 4 треугольника.

Волокна, непосредственно прилегающие к шву, имеют разные

деформации: верхние волокна удлинились, а нижние укоротились. У концов балки заметен по шву сдвиг. Если же до изгиба сплотить брусья шпонками так, чтобы сдвиг не мог произойти, то работа такой составной балки подобна работе балки цельного сечения высотой $2h$ (рис. 141, б). Эпюра напряжений составной балки представляет собой 2 треугольника.

До сплачивания брусьев суммарный момент сопротивления их W_1 равнялся:

$$W_1 = 2W = 2 \frac{bh^2}{6},$$

т. е. в 2 раза больше W .

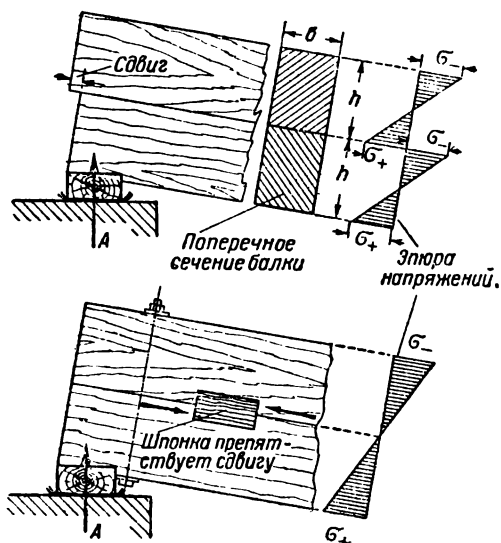


Рис. 141. Работа составных брусьев:

а — брусья несоединенные; б — брусья, соединенные шпонками.

Решение. На рис. 142 верхняя половина поперечного сечения разделена на полосы по 1 см. Площадь каждой полоски:

$$f = 12 \text{ см} \times 1 \text{ см} = 12 \text{ см}^2.$$

Для каждой полоски различно ее среднее расстояние y от нейтрального слоя. Вычислим для каждой полоски значение fy^2 .

Все числа вынесем в табл. 2.

Для одной половины поперечного сечения сумма всех fy^2 равна 3992 см⁴, а для всего сечения будем иметь:

$$\sum fy^2 = 2 \cdot 3992 \text{ см}^4 = 7984 \text{ см}^4.$$

Следовательно момент инерции данной балки:

$$J = \sum fy^2 = 7984 \text{ см}^4.$$

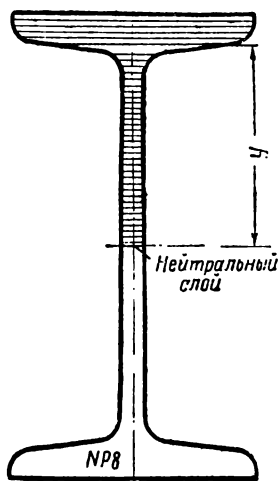


Рис. 143. Определение момента инерции двутаврового сечения.

Таблица 2

№ п/п	y (см)	y^2 (см ²)	fy^2 (см ⁴)
1	0,5	0,25	3,0
2	1,5	2,25	27,0
3	2,5	6,25	75,0
4	3,5	12,25	147,0
5	4,5	20,25	243,0
6	5,5	30,25	263,0
7	6,5	42,25	507,0
8	7,5	56,25	677,0
9	8,5	72,25	867,0
10	9,5	90,25	1 083,0
			3 994 см ⁴

Полученное число разделим на $\frac{h}{2} = 10$ см:

$$\frac{7984 \text{ см}^4}{10 \text{ см}} = 798,4 \text{ см}^3.$$

Вычислим теперь непосредственно момент сопротивления поперечного сечения:

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{10 \cdot 20^2}{6} = 800 \text{ см}^3.$$

Этот результат почти совпадает с предыдущим. Расхождение составляет всего лишь 1/4%. Выражение $\sum fy^2 : \frac{h}{2}$ тем ближе к $\frac{bh^2}{6}$, чем уже полоски, т. е. чем точнее учтено изменение расстояния волокон от нейтрального слоя. Заметим, что для практических целей точность первого полученного результата была бы вполне достаточна.

Таким образом момент сопротивления можно вычислить также по формуле:

$$W = \sum fy^2 : \frac{h}{2}.$$

Будем иметь:

$$W = \frac{J}{\frac{h}{2}}.$$

Момент инерции в $\frac{h}{2}$ раз больше соответствующего момента сопротивления.

Для прямоугольного сечения:

$$J = \frac{h}{2} \cdot \frac{bh^2}{6} = \frac{bh^3}{12}.$$

Если нужно найти момент инерции сложного сечения, например двутавровой балки, то сечение разбивают на отдельные части (рис. 143).

Приняв отрезки кривых за прямые и представив сечение как бы состоящим из прямоугольников и трапеций, можно по найденным формулам с необходимой точностью определить момент инерции всего сечения. Затем, разделив величину момента инерции на половину высоты сечения, получим величину момента сопротивления.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Опишите построение эпюры изгибающих моментов.
2. Где расположены растянутые волокна в балке, заделанной одним концом, и в балке на двух опорах?
3. Какие опыты позволяют установить и измерить наличие растянутых и сжатых волокон в балке?
4. Каким приемом пользуются для выяснения напряжений, действующих в сечении?
5. Назовите статические условия равновесия, применяемые для рассмотрения отделяемой части балки.
6. Что определяет первое условие равновесия?
7. Что определяет второе условие равновесия?
8. Что определяет третье условие равновесия?
9. Напишите выражение момента сопротивления прямоугольного сечения.
10. Напишите формулу для определения сечения, обеспечивающего прочность балки.
11. Назовите допустимые напряжения при изгибе деревянных и стальных балок.
12. Чем обусловлен профиль стальных прокатных балок?

Глава 4. РАСЧЕТ БАЛОК

Изложенные в главе 3 сведения дают возможность решать значительное количество практических задач по расчету балок на изгиб.

Прежде всего при расчете выбирают схему балки, соответствующую условиям работы балки и сооружения. Затем выясняют величину нагрузки, действующей на балку. После этого определяют наибольший изгибающий момент и наконец для подбора сечения вычисляют требуемый момент сопротивления. В случае необходимости проверяют напряжения сдвига; для этой цели определяют величину наибольшей поперечной силы.

Придерживаясь изложенного порядка, рассмотрим решения основных задач.

§ 1. БАЛКА, ЗАДЕЛАННАЯ ОДНИМ КОНЦОМ, НЕСУЩАЯ СОСРЕДОТОЧЕННУЮ НАГРУЗКУ

Такие балки часто применяются в строительстве. К ним например относятся балки, поддерживающие люльки, настилы лесов.

Рассмотрим балку, заделанную правым концом; на левый ее конец действует сила P (рис. 144).

Проводим сечение $I-I$, отбрасываем правую часть балки и рассматриваем равновесие левой части.

Слева от любого сечения балки действует только данная нагрузка.

Изгибающий момент, т. е. сумма моментов сил, действующих на балку слева от данного сечения, равняется:

$$M_x = -Px.$$

Буква x („икс“) выражения M_x означает, что момент взят относительно сечения, находящегося на расстоянии x от конца балки.

Этот момент увеличивается вместе с x . Наибольшая величина его будет при наибольшем значении x , т. е. когда $x = l$ (рис. 144):

$$M_{\max} = -Pl. \quad (11)$$

Построим эпюру изгибающих моментов. Для этой цели определим их численные значения в нескольких сечениях балки.

Допустим, что $P = 200$ кг, $l = 1,5$ м.

Тогда наибольший изгибающий момент в сечении $I-I$:

$$M = -Pl = -200 \cdot 1,5 = -300 \text{ кгм.}$$

Изгибающий момент в сечении $II-II$ на расстоянии $x = 1,0$ м от конца балки:

$$M_2 = -Px = -200 \cdot 1,0 = -200 \text{ кгм.}$$

Изгибающий момент в сечении $III-III$ на расстоянии $x = 0,5$ м:

$$M_3 = -Px = -200 \cdot 0,5 = -100 \text{ кгм.}$$

Изгибающий момент на конце балки:

$$M_4 = 0.$$

Проведем горизонтальную прямую под схемой балки, наметим места вышеуказанных сечений и в них отложим перпендикулярные отрезки, изображающие величины моментов.

Концы отрезков лежат на одной наклонной прямой. Получаем треугольную эпюру изгибающих моментов.

Подбор сечения. Для определения момента сопротивления W балки пользуются формулой (10):

$$W = \frac{M}{\sigma},$$

где σ — допускаемое напряжение при изгибе для данного материала.

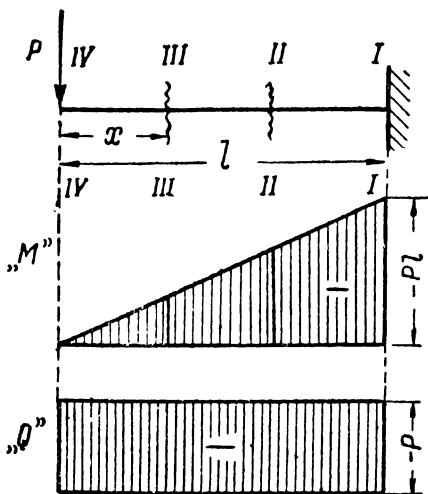


Рис. 144. Расчет балки, заделанной одним концом и нагруженной на другом конце.

Поперечная сила. В любом сечении поперечная сила равна сумме внешних сил, действующих от него слева. Для рассматриваемой нагрузки сила Q неизменна по всей длине балки, так как, где бы ни провели сечение, сила, действующая слева от него, равняется силе P . Это показано на эпюре Q :

$$Q_x = -P.$$

Пример. Люлька подвешена к брускам на расстоянии 1,2 м от их опоры (рис. 145). Нагрузка от люльки равна 600 кг. Определить необходимое сечение брусков.

Решение. На один брус приходится нагрузка:

$$P = 600 : 2 = 300 \text{ кг.}$$

Вычисляем наибольший изгибающий момент:

$$M = -Pl = -300 \cdot 1,2 = -360 \text{ кгм,}$$

или 36 000 кгсм.

Определяем момент сопротивления:

$$W = \frac{M}{\sigma} = \frac{36\,000}{100} = 360 \text{ см}^3.$$

Размеры прямоугольного сечения находим по формуле:

$$W = \frac{bh^2}{6}.$$

Задаемся шириной бруса $b = 12 \text{ см}$ и определяем его высоту:

$$W = \frac{12h^2}{6} = 360;$$

отсюда

$$h = \sqrt{180} = 13,5.$$

Принимаем сечение $12 \times 14 \text{ см}$.

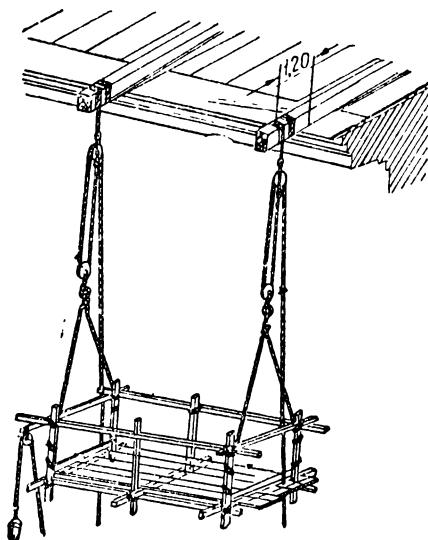


Рис. 145. Балки, поддерживающие люльку.

§ 2. БАЛКА, ЗАДЕЛАННАЯ ОДНИМ КОНЦОМ, НЕСУЩАЯ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННУЮ НАГРУЗКУ

В предыдущих примерах мы не учитывали собственного веса. Собственный вес представляет собой нагрузку, равномерно распределенную по всей длине балки. Многие другие нагрузки также распределяются равномерно по длине балки, например пол и накат. Необходимо поэтому знать определение изгибающих моментов от равномерно распределенной нагрузки.

Разделим балку на малые участки x . Изображая вес каждого участка графически, получим ряд параллельных сил. Равнодействующая этих сил равна их сумме и приложена в середине

балки (рис. 146). Момент этой равнодействующей равен сумме моментов слагаемых сил.

Допустим, что собственный вес 1 пог. м балки $p = 20$ кг, длина балки $l = 3$ м. Тогда общий вес балки $pl = 20 \cdot 3 = 60$ кг. Этот вес будем считать приложенным в середине балки, т. е. на расстоянии от левого конца $\frac{l}{2} = 1,5$ м.

Изгибающий момент составит:

$$M = -pl \frac{l}{2} = -20 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = -60 \cdot 1,5 = -90 \text{ кгм.}$$

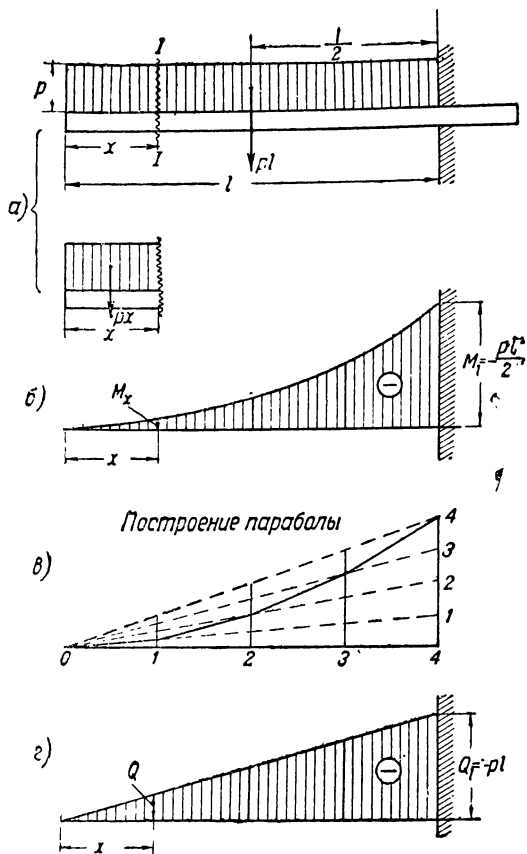


Рис. 146. Расчет балки, заделанной одним концом и равномерно нагруженной.

Для этой цели определим их величину в следующих сечениях рассматриваемой балки.

В сечении $I-I$ на расстоянии $x = l = 3$ м от конца балки:

$$M_1 = -20 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = -90 \text{ (кгм).}$$

Мы определили величину наибольшего изгибающего момента, так как приняли во внимание полный вес балки, который вызывает наибольшее усилие в опасном сечении $I-I$ (у заделки в стену). Определим изгибающий момент в сечении балки, отстоящем на расстоянии x от конца балки (рис. 146, а).

Для этого случая изгибающий момент равняется моменту равнодействующей от нагрузки, равномерно распределенной по участку x :

$$M_x = -px \frac{x}{2}.$$

С увеличением x моменты растут, причем наибольший момент соответствует закрепленному сечению, для которого $x = l$:

$$M = -pl \frac{l}{2} = -\frac{rl^2}{2}. \quad (12)$$

Построим эпюру изгибающих моментов для равномерно распределенной нагрузки.

В сечении II—II на расстоянии $x=2$ м от конца балки:

$$M_2 = -20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -40 \text{ кгм.}$$

В сечении III—III на расстоянии $x=1$ м от конца балки:

$$M_3 = -20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -10 \text{ кгм.}$$

В сечении IV—IV на конце балки:

$$M_4 = 0.$$

Проведем горизонтальную прямую под схемой рассмотренной балки; наметим места вышеуказанных сечений и в них отложим перпендикулярные отрезки, изображающие величины моментов (рис. 146, б).

Соединим концы отрезков плавной кривой. Эта кривая является параболой. Чем больше число установленных промежуточных точек, тем точнее построение кривой (рис. 146, в).

Найденная эпюра дает возможность непосредственным измерением определить по масштабу величину моментов в любом сечении балки.

Подбор сечения. Для определения момента сопротивления W балки будем пользоваться формулой (10).

$$W = \frac{M}{\sigma},$$

где

$$M = -pl \cdot \frac{l}{2} = -\frac{pl^2}{2},$$

σ — допускаемое напряжение на изгиб для данного материала.

Поперечная сила. Проведем сечение I—I на расстоянии x от конца балки и определим перерезывающую силу в этом сечении, т. е. сумму вертикальных сил, действующих слева от него.

$$Q_x = -px.$$

На рис. 146, г показана эпюра поперечных сил.

Пример. Двухтавровые балки, заделанные одним концом, поддерживают нагруженный настил. На каждую балку приходится равномерно распределенная нагрузка в размере 350 кг на 1 пог. м, включая собственный вес балки. Вылет балки — 2,0 м. Подобрать соответствующий номер балки.

Решение. Вычисляем наибольший изгибающий момент:

$$M = -pl \cdot \frac{l}{2} = -350 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -700 \text{ кгм, или } 70\,000 \text{ кгсм.}$$

Определяем момент сопротивления:

$$W = \frac{70\,000}{1\,400} = 50 \text{ см}^3.$$

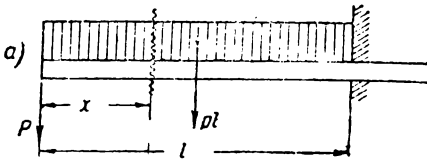
По таблице двухтавровых балок находим соответствующий № 10 ($W = 49 \text{ см}^3$).

§ 3. БАЛКА, ЗАДЕЛАННАЯ ОДНИМ КОНЦОМ, НЕСУЩАЯ СОСРЕДОТОЧЕННУЮ И РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННУЮ НАГРУЗКУ

Предположим, что на балку, заделанную одним концом, действуют приложенный к другому концу сосредоточенный груз и нагрузка, равномерно распределенная по всей длине балки (рис. 147).

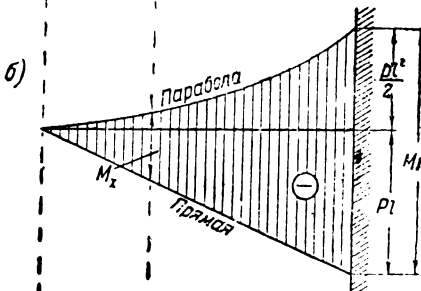
Действие обеих нагрузок суммируется.

В сечении, расположенном на расстоянии x от конца балки, получим изгибающий момент:



$$M_x = -Px - px \frac{x}{2}.$$

Наибольший изгибающий момент соответствует сечению I—I (у заделки). Для этого сечения имеем:



$$M_{\max} = -Pl - pl \frac{l}{2}. \quad (13)$$

Графические величины моментов определяются суммой отрезков, построенных для моментов от сосредоточенной нагрузки и построенных для равномерно распределенной нагрузки (рис. 147, б). Для ясности эпюры построены по обе стороны от оси. Отрезки, изображающие величины моментов сосредоточенной нагрузки, отложены вниз от оси. Отрезки, изображающие величины моментов, равномерно распределенной нагрузки, отложены вверх.

Для определения момента сопротивления балки пользуются формулой:

Рис. 147. Расчет балки, заделанной одним концом, нагруженной сосредоточенной нагрузкой на другом конце и равномерной нагрузкой по пролету.

$$W = \frac{M}{\sigma},$$

где

$$M = -Pl - pl \frac{l}{2},$$

σ — допускаемое напряжение для данного материала при изгибе.

Поперечная сила также определяется отдельно для обоих видов нагрузки. Эпюра поперечных сил для этого случая показана на рис. 147, в.

Пример. Двутавровые балки балкона подвергаются действию нагрузки, распределенной равномерно по их длине. Эта нагрузка состоит из собственного веса балки и веса железобетонной

плиты балкона; всего $p = 250$ кг на 1 пог. м балки. Кроме того на каждую балку приходится нагрузка от ограждения $P = 150$ кг, сосредоточенная на конце.

Вылет балки $l = 2,0$ м. Определить прочное сечение балки.

Решение. Опасным сечением балки является сечение у стены, в котором действует сумма наибольших моментов от равномерной и сосредоточенной нагрузок.

Определим суммарный момент:

$$M = -Pl - pl \frac{l}{2} = -150 \cdot 2 - 250 \cdot 2 \frac{2}{3} = -300 - 500 = -800 \text{ кгм, или } 80\,000 \text{ кгсм.}$$

Момент сопротивления:

$$W = \frac{M}{\sigma} = \frac{80\,000}{1\,400} = 57 \text{ см}^3.$$

По таблице двутавровых балок находим ближайшее (большее) значение $W = 72 \text{ см}^3$, которое соответствует балке № 12.

§ 4. БАЛКА, ЛЕЖАЩАЯ НА ДВУХ ОПОРАХ, НЕСУЩАЯ СОСРЕДОТОЧЕННУЮ НАГРУЗКУ

Балки на двух опорах находят в строительстве наибольшее применение. Например перекрытия жилых зданий состоят из деревянных или стальных балок, опирающихся концами на стены и промежуточные опоры; по этим балкам устраивается заполнение в виде наката или плит, настилается чистый пол.

Собственный вес балок, заполнения и пола представляет собой равномерно распределенную нагрузку. Такой же нагрузкой считается вес находящихся в жилом помещении людей, предметов обстановки и пр.

В заводских и складских помещениях балки несут различную нагрузку; чаще всего бывают нагрузки: равномерно распределенная и сосредоточенная.

Сосредоточенная нагрузка по середине пролета

Изгибающий момент. Допустим, что балка несет сосредоточенную нагрузку P по середине пролета. На каждую опору приходится половина нагрузки $\frac{P}{2}$, и следовательно реакция опоры равна также $\frac{P}{2}$ (рис. 135).

Балка находится в равновесии под действием силы P и двух сил $\frac{P}{2}$. Определим величину изгибающего момента в сечении по середине пролета балки. Слева от данного сечения действует только одна внешняя сила — реакция опоры $\frac{P}{2}$; сечение удалено на расстояние $\frac{l}{2}$ от левой опоры балки.

Получаем величину момента:

$$M = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}. \quad (14)$$

Этот момент является наибольшим. Чем ближе сечения к левой опоре, тем меньше величина момента; на опоре она равна нулю. Так как балка нагружена симметрично, то сечения правой ее половины находятся в таких же условиях, что и сечения левой половины. Поэтому эпюра моментов представляет собой равнобедренный треугольник, высота которого равна величине наибольшего изгибающего момента.

Пример. Двутавровая балка, лежащая на двух опорах, нагружена посередине.

Нагрузка равна 3000 кг, расчетный пролет балки — 3,0 м. Определить необходимый номер балки.

Решение. Изгибающий момент составит:

$$M = \frac{Pl}{4} = \frac{3100 \cdot 3}{4} = 2250 \text{ кгм, или } 225000 \text{ кгсм.}$$

Подбор сечения осуществляется, как обычно, по формуле:

$$W = \frac{M}{\sigma};$$

где

$$M = \frac{Pl}{4}.$$

Для вышеуказанного изгибающего момента необходим момент сопротивления:

$$W = \frac{225000}{1400} = 160 \text{ см}^3.$$

Этому соответствует № 18.

Сосредоточенная нагрузка в любом сечении

Очень часто сосредоточенная нагрузка приходится не по середине балки. Выведем формулу изгибающего момента для этого случая. Прежде всего необходимо определить величину реакции опор.

Допустим, что груз P приложен на расстоянии b от правой опоры B и на расстоянии a от левой опоры A (рис. 148, а).

Применим общие условия равновесия балки.

1) Сумма всех вертикальных сил, действующих на балку, должна равняться нулю:

$$-P + A + B = 0, \text{ или } P = A + B$$

(направление снизу вверх считаем положительным).

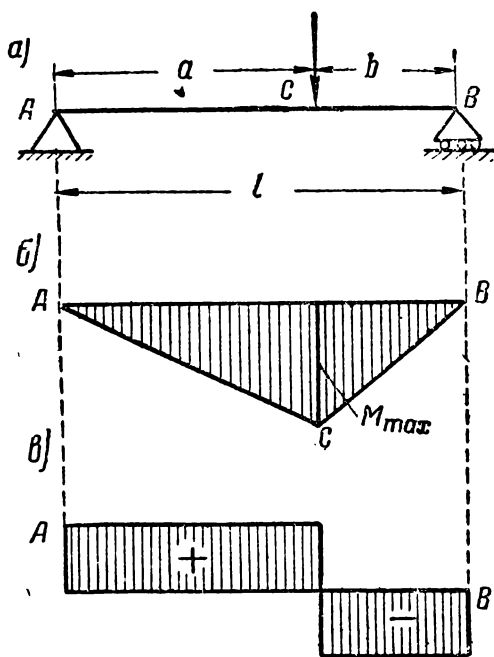


Рис. 148. Расчет однопролетной балки с нагрузкой в любом сечении.

2) Сумма моментов относительно любой точки должна равняться нулю.

Составим уравнение моментов относительно точки опоры A ; получим:

$$-Bl + Pa = 0; \quad B = P \frac{a}{l}.$$

Точно так же из уравнения моментов относительно B :

$$Al - Pb = 0$$

находим:

$$A = P \frac{b}{l}.$$

Впрочем второе уравнение можно не составлять, а, воспользовавшись равенством $P = A + B$, подставить в него значение B и получить величину A .

Если же оба уравнения составлены, то равенство $P = A + B$ служит для проверки полученных величин A и B , которые в сумме должны дать P .

Теперь определим изгибающий момент в сечении непосредственно под грузом, т. е. на расстоянии a от опоры A . Момент равен произведению $A \cdot a$. Но

$$A = P \frac{b}{l},$$

следовательно

$$M = P \frac{b}{l} a = P \frac{ab}{l}. \quad (15)$$

Полученный момент является наибольшим. Чем ближе сечения к опоре A , тем меньше величина момента; на опоре она равна нулю. Сечения правой половины балки находятся в подобных же условиях. Эюра моментов представляет собой треугольник, вершина которого C расположена под грузом, а высота равна величине наибольшего изгибающего момента (рис. 148, б).

Эюра поперечных сил Q дана на рис. 148, в.

Пример. Рассчитать деревянную балку, изображенную на рис. 149.

$$\text{Решение. } M = P \frac{ab}{l} = 760 \frac{1,9 \cdot 0,8}{2,7} = 4280 \text{ кгсм,}$$

или 42800 кгсм.

Для восприятия вышеуказанного изгибающего момента необходим следующий момент сопротивления деревянной балки:

$$W = \frac{42800}{100} = 428 \text{ см}^3.$$

Можно принять брус сечением 10×16 .

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{10 \cdot 16^2}{6} = 425 \text{ см}^3.$$

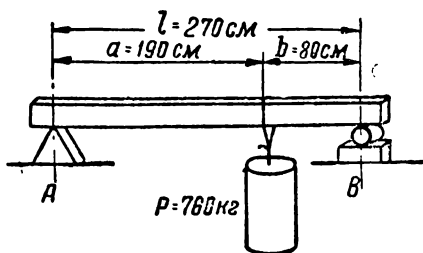
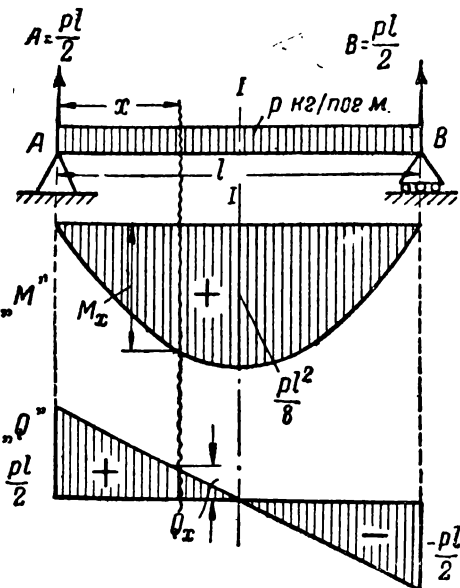


Рис. 149. Однопролетная балка, несущая сосредоточенную нагрузку.

§ 5. БАЛКА, ЛЕЖАЩАЯ НА ДВУХ ОПОРАХ, НЕСУЩАЯ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННУЮ НАГРУЗКУ

Допустим, что балка AB (рис. 150) несет нагрузку от собственного веса, равномерно распределенную по всей длине балки l ; причем величина нагрузки на единицу длины равняется p ; полная нагрузка на балку будет pl ; реакции опор будут $A = B = \frac{pl}{2}$.

Определим изгибающий момент для сечения $I-I$ по середине балки. Моменты сил, составляющих равномерно распределенную нагрузку, заменяем моментом равнодействующей силы.



Так мы поступали в случае балки, заделанной одним концом.

Равнодействующая равна весу половины балки $\frac{pl}{2}$, что составляет величину сопротивления опоры; точка приложения равнодействующей находится в середине рассматриваемой половины балки, т. е. на расстоянии $\frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l}{4}$ от конца балки.

Получим следующую величину изгибающего момента:

$$M = \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{pl^2}{8}. \quad (16)$$

Изменение величины момента по длине балки изображается параболической эпюрой (рис. 150). Наибольший

Рис. 150. Расчет однопролетной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

момент действует в среднем сечении балки. На опорах моменты равны нулю.

Подбор сечения производится по общей формуле:

$$W = \frac{M}{\sigma}, \text{ где } M = \frac{pl^2}{8}.$$

Поперечная сила в сечении, взятом на расстоянии x от левой опоры, равняется:

$$Q_x = \frac{pl}{2} - px.$$

На опорах величина поперечной силы достигает предела и равна реакции опоры $\frac{pl}{2}$; для середины пролета $Q = 0$.

Эпюра поперечных сил показана на рис. 150.

Для сечения, в котором поперечная сила равна нулю, а именно по середине пролета, изгибающий момент является наибольшим.

Пример 1. Балка пролетом $l = 4,0$ м нагружена сплошной равномерно распределенной нагрузкой $p = 365$ кг/пог. м. Определить наибольший изгибающий момент и подобрать сечение двутавровой балки.

$$\text{Решение. } M = \frac{pl^2}{8} = \frac{365 \cdot 4^2}{8} = 730 \text{ кгм, или } 73\,000 \text{ кгсм.}$$

$$W = \frac{73\,000}{1\,400} = 52 \text{ см}^3.$$

В табл. 1 находим соответствующий № 10.

Пример 2. В предыдущих примерах нагрузки были заданы. Между тем часто приходится определять нагрузки по проекту. На рис. 151 дан разрез междуэтажного перекрытия жилого зда-

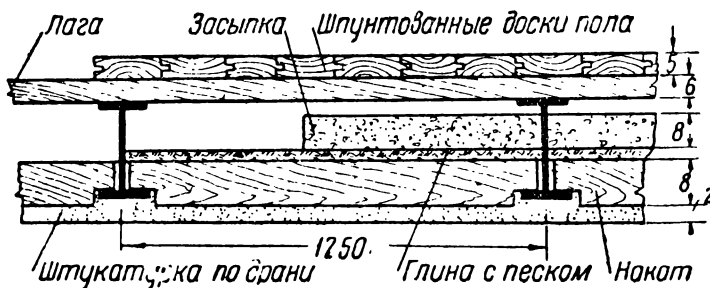


Рис. 151. Разрез междуэтажного перекрытия по двутавровым балкам.

ния. Двутавровые балки должны быть уложены через 1,25 м; расстояние между стенами 5,8 м. Подобрать прочное сечение балок.

Решение. а) Определение нагрузки. Балки перекрытия жилых зданий обычно рассчитываются под нагрузку, сплошь покрывающую все помещение.

Подсчитаем постоянную нагрузку от собственного веса перекрытия в кг на 1 м².

Штукатурка толщиной 2 см (объемный вес 1500 кг/м³):

$$0,02 \cdot 1500 = 30.$$

Засыпка и смазка толщиной 8 см (объемный вес 1300 кг/м³):

$$0,08 \cdot 1300 = 104.$$

Накат и чистый пол (8 + 5) = 13 см (объемный вес 700 кг/м³):

$$0,13 \cdot 700 = 91.$$

Лаги дощатые на каждый м² по одной (длина лаги 1 м, ширина 20 см):

$$0,2 \cdot 0,06 \cdot 1 \cdot 650 = 8$$

$$\text{Всего } 233 \text{ кг/м}^2.$$

На 1 пог. м балки приходится 1,25 м² площади перекрытия.

Учитывая ориентировочно собственный вес балки 25 кг/пог. м получим суммарную постоянную нагрузку балки на 1 пог. м :

$$233 \cdot 1,25 + 25 = 316 \text{ кг/пог. м.}$$

Временную нагрузку принимаем в 175 кг/м^2 , а на 1 пог. м балки $1,75 \cdot 1,25 = 219 \text{ кг/пог. м}$.

Полная нагрузка на 1 пог. м балки:

$$p = 316 + 219 = 535 \text{ кг.}$$

Принимаем с округлением 540 кг/пог. м .

б) Расчетная схема. Балку рассчитываем как свободно лежащую на двух опорах, нагруженную сплошной, равномерно распределенной нагрузкой $p = 540 \text{ кг/пог. м}$ (рис. 150). Расчетную длину балки принимаем равной расстоянию между центрами опор балки. Концы балки заходят в гнезда стен на глубину $0,2 \text{ м}$; отсюда

$$l = 5,8 + 0,2 = 6,0 \text{ м.}$$

в) Наибольший изгибающий момент:

$$M = \frac{pl^2}{8} = \frac{540 \cdot 6,0^2}{8} = 2520 \text{ кгм, или } 252\,000 \text{ кгсм.}$$

г) Момент сопротивления

$$W = \frac{252\,000}{1\,400} = 180 \text{ см}^3.$$

По таблице двутавровых балок находим соответствующий № 18.

§ 6. БАЛКА, ЛЕЖАЩАЯ НА ДВУХ ОПОРАХ, НЕСУЩАЯ СОСРЕДОТОЧЕННУЮ И РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННУЮ НАГРУЗКИ

Предположим, что на балку, расположенную на двух опорах, действует равномерно распределенная по всей длине нагрузка и сосредоточенный груз посередине (рис. 152, а).

В этом случае надо определить отдельно действие сосредоточенного груза и действие равномерно распределенной нагрузки и полученные результаты суммировать. Так мы поступали

Рис. 152. Расчет однопролетной балки, нагруженной сосредоточенной и равномерно распределенной нагрузками.

и в отношении балки, заделанной одним концом. Выше было установлено, что изгибающий момент от действия сосредоточенного груза, приложенного по середине пролета, вычис-

ляется по формуле $M = \frac{Pl}{4}$, а от действия равномерно распределенной нагрузки по формуле $M = pl \frac{l}{8}$.

Оба эти значения моментов соответствуют сечению по середине балки, которое является в данном случае опасным сечением.

Складывая величины моментов, получим наибольший изгибающий момент

$$M = \frac{Pl}{4} + pl \frac{l}{8}. \quad (17)$$

Графически величины моментов определяются суммой отрезков, построенных для моментов от сосредоточенного груза (треугольная эпюра) и для моментов от равномерно распределенной нагрузки (параболическая эпюра). На рис. 152,б для ясности эпюры построены по обе стороны от оси; величина суммарного момента в любом сечении может быть получена измерением отрезка эпюры.

Для подбора сечения балки пользуемся общей формулой (10):

$$W = \frac{M}{\sigma},$$

где

$$M = \frac{Pl}{4} + pl \frac{l}{8},$$

σ — допускаемое напряжение для данного материала балки.

Эпюра поперечных сил строится также по общему правилу. В данном случае необходимо суммировать отрезки эпюры поперечных сил от равномерно распределенной нагрузки с соответствующими отрезками для сосредоточенного груза. Окончательная эпюра поперечных сил изображена на рис. 152,в.

Пример. Балка пролетом 3,0 м нагружена равномерно распределенной нагрузкой $p = 240$ кг/пог.м и сосредоточенным грузом $P = 800$ кг, приложенным посередине. Подобрать сечение деревянной и стальной балок.

Решение. Определим суммарный изгибающий момент от действия двух нагрузок:

$$M = \frac{Pl}{4} + \frac{pl^2}{8} = \frac{800 \cdot 3}{4} + \frac{240 \cdot 3^2}{8} = 1170 \text{ кгм}, \text{ или } 117\,000 \text{ кгсм}.$$

Необходимый момент сопротивления деревянной балки:

$$W = \frac{M}{\sigma} = \frac{117\,000}{100} = 1170 \text{ см}^3.$$

Допустим, что взят брус шириной $b = 18$ см; определим его высоту:

$$\frac{18h^2}{6} = 1170; h = 20 \text{ см}.$$

Необходимый момент сопротивления стальной балки:

$$W = \frac{M}{\sigma} = \frac{117\,000}{1400} = 84 \text{ см}^3.$$

По таблице двутавровых балок находим ближайшее (большее) значение $W = 102 \text{ см}^3$, которое соответствует балке № 14. Выясним напряжение в этой балке, возникающее под действием данной нагрузки:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{117\,000}{102} = 1\,140 \text{ кг/см}^2.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Напишите формулу, определяющую величину наибольшего изгибающего момента для балки, заделанной одним концом и нагруженной на другом конце.
2. Изложите общий порядок расчета балки, упомянутый в п. 1.
3. Дайте обоснование формулы наибольшего изгибающего момента для балки, заделанной одним концом и равномерно нагруженной.
4. Изобразите эпюры изгибающих моментов для балок, упомянутых в пп. 1 и 3.
5. Назовите случаи применения балок на двух опорах.
6. Как определяются реакции опор балки на двух опорах?
7. Напишите выражение величины наибольшего изгибающего момента для балки, нагруженной посередине; изобразите эпюру моментов.
8. Изложите общий порядок расчета балки, упомянутой в п. 7.
9. Приведите примеры равномерно распределенной нагрузки на балку.
10. Напишите выражение наибольшего изгибающего момента для балки на двух опорах, равномерно нагруженной; изобразите эпюру моментов.

Глава 5. КРУЧЕНИЕ. СЛОЖНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

§ 1. КРУЧЕНИЕ

Предположим, что круглый стержень AB , заделанный одним концом A , подвергается кручению приложенной к другому концу B парой сил PP (рис. 153). В стержне возникают внутренние силы сопротивления кручению.

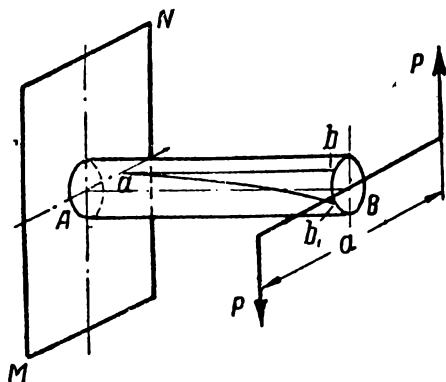


Рис. 153. Кручение.

Волокна, наиболее удаленные от оси стержня, т. е. лежащие на наружной его поверхности, испытывают наибольшее перемещение, между тем как центральное волокно, совпадающее с осью стержня, остается на месте. Если линия ab (рис. 155) представляет первоначальное положение волокна, лежащего на поверхности,

то после скручивания волокно принимает положение ab_1 . Дуга bb_1 представит величину перемещения сечения B . Величина этого перемещения будет тем больше, чем больше момент внешних сил,

Наиболее напряженными являются наружные волокна скручиваемого стержня. Необходимо, чтобы напряжение этих волокон не превосходило допускаемого напряжения кручения, устанавливаемого в зависимости от условий работы скручиваемого элемента.

Так например, для приводных валов, подвергающихся резкому нарастанию скручивающих усилий и одновременно изгибающим усилиям, допускают напряжение $\sigma_{кр} = 200 \text{ кг/см}^2$.

Подбор диаметра d круглого сечения производится по формуле:

$$W_{кр} = \frac{M}{\sigma_{кр}}, \quad (18)$$

где $W_{кр} = \frac{d^3}{5} \text{ см}^3$ — момент сопротивления на кручение;

M — крутящий момент;

$\sigma_{кр}$ — допускаемое напряжение на кручение.

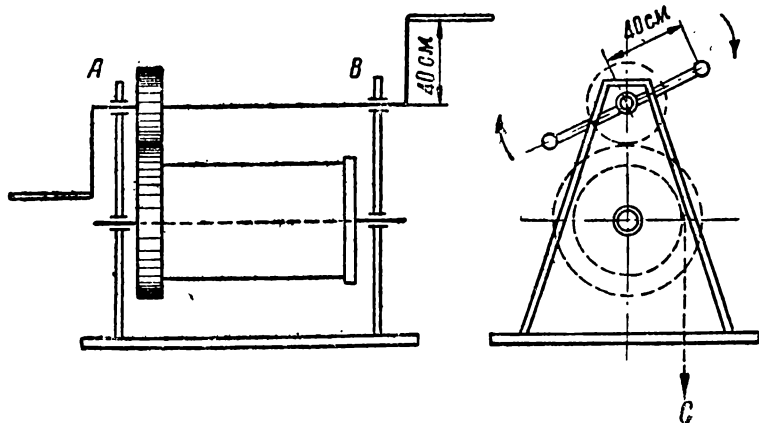


Рис. 154. Расчет вала.

Пример. На рукоятки лебедки действуют по два рабочих, каждый с силой $P = 15 \text{ кг}$. Длина рукоятки $l = 40 \text{ см}$ (рис. 154). Допускаемое напряжение на кручение $\sigma_{кр} = 200 \text{ кг/см}^2$.

Подобрать диаметр вала.

Решение. а) Определим скручивающий момент:

$$M = Pl = 2 \cdot 15 \cdot 40 = 1200 \text{ кгсм.}$$

б) По формуле (15) находим момент сопротивления на кручение:

$$W_{кр} = \frac{M}{\sigma_{кр}} = \frac{1200}{200} = 6 \text{ см}^3.$$

в) Определяем диаметр вала исходя из равенства $W_{кр} = \frac{d^3}{5}$:

$$\frac{d^3}{5} = 6; \quad d = \sqrt[3]{30} = 31 \text{ мм.}$$

§ 2. СЛОЖНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Кроме основных деформаций — растяжения, сжатия, сдвига, изгиба и кручения — часто происходят сложные деформации тел. Эти деформации рассматриваются как сочетание двух или нескольких основных деформаций.

Если например брус подвергается одновременно изгибу и растяжению или сжатию, то в случае очень малых деформаций можно определить напряжения, рассматривая отдельно влияние изгиба и влияние продольной (растягивающей или сжимающей) силы и суммируя результаты. Продольная сила вызывает во всех точках поперечного сечения бруса одинаковые напряжения $\sigma = \frac{P}{F}$. При изгибе наибольшие напряжения $\sigma = \frac{M}{W}$ возникнут

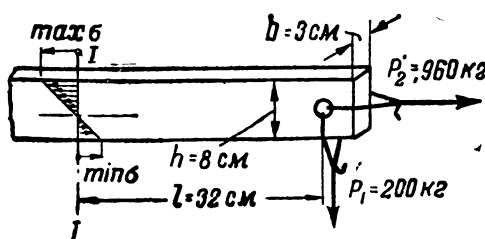


Рис. 155. Изгиб и растяжение бруса.

в крайних волокнах бруса.

Одно из этих напряжений будет растягивающее $(+\frac{M}{W})$, другое — сжимающее $(-\frac{M}{W})$.

Таким образом напряжение от действия сил — продольной и изгибающей — определится по формуле:

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{M}{W}. \quad (19)$$

Представим себе, что стальной брусок сечением 3×8 см подвергается действию сил: P_1 — продольной растягивающей и P_2 — изгибающей (рис. 155).

Вычислим напряжение в поперечном сечении $I-I$, расположенном на расстоянии 32 см от конца бруска.

Растяжение.

Площадь поперечного сечения бруска:

$$F = bh = 8 \cdot 3 = 24 \text{ см}^2.$$

Растягивающее напряжение:

$$\sigma_{\text{раст}} = \frac{P_1}{F} = \frac{960}{24} = 40 \text{ кг/см}^2.$$

Изгиб.

Изгибающий момент:

$$M = P_2 l = 200 \cdot 32 = 6400 \text{ кгсм.}$$

Момент сопротивления:

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{3 \cdot 8^2}{6} = 32 \text{ см}^3.$$

Напряжение при изгибе:

$$\sigma_{\text{изг}} = \frac{M}{W} = \frac{6400}{32} = 200 \text{ кг/см}^2.$$

Определим теперь полное напряжение, действующее в сечении. При этом растягивающие напряжения отмечаются знаком плюс (+), а сжимающие — знаком минус (—).

В крайнем верхнем волокне рассматриваемого сечения полное напряжение равно алгебраической сумме напряжений растяжения от изгиба и напряжений растяжения от продольной силы:

$$\sigma_{изг} + \sigma_{раст} = 200 + 40 = 240 \text{ кг/см}^2.$$

В крайнем нижнем волокне того же сечения полное напряжение равно алгебраической сумме напряжений сжатия от изгиба и напряжений растяжения от продольной силы:

$$\sigma_{изг} + \sigma_{раст} = -200 + 40 = -160 \text{ кг/см}^2.$$

Из рассмотрения двух полученных результатов обнаруживается, что наиболее напряженным является верхнее волокно.

Нейтральный слой не находится по середине сечения бруска. Действительно, нормальные напряжения в нейтральном слое равны нулю, а здесь по середине сечения бруска действует напряжение $\sigma = \frac{P}{F} = 40 \text{ кг/см}^2$. Нейтральный слой расположен ниже оси симметрии, как это видно из диаграммы напряжений, изображенной на теле бруска (рис. 155).

Пример. Растягивающее усилие в стропильной затяжке составляет 4300 кг. Кроме того затяжка несет равномерно распределенную изгибающую нагрузку в 100 кг/пог. м. Расчетный пролет $l = 5 \text{ м}$; сечение $12 \times 18 \text{ см}$. Определить напряжение в затяжке.

Решение. Площадь поперечного сечения затяжки:

$$F = 12 \cdot 18 = 216 \text{ см}^2.$$

Напряжение от растяжения:

$$\sigma_{раст} = \frac{P}{F} = \frac{4300}{216} = 20 \text{ кг/см}^2.$$

Момент сопротивления затяжки:

$$W = \frac{12 \cdot 18^2}{6} = 648 \text{ см}^3.$$

Изгибающий момент:

$$M = \frac{Pl^2}{8} = \frac{100 \cdot 5^2}{8} = 312,5 \text{ кгм}.$$

Напряжение от изгиба:

$$\sigma_{изг} = \frac{M}{W} = \frac{3500}{648} = 48 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее напряжение развивается в крайнем нижнем волокне бруса:

$$\sigma_{\max} = 20 + 48 = 68 \text{ кг/см}^2.$$

Это напряжение допустимо, и следовательно сечение является достаточным.

§ 3. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

Деформация продольного изгиба (выпучивания) возникает при сжатии длинных тонких тел.

Например при сжатии достаточно длинного бруса силами, направленными по оси его, брус выпучивается в сторону, направления сил уже не совпадают с осью бруса (рис. 156). Вследствие этого возникают изгибающие моменты, увеличивающие прогиб, и разрушение может произойти не от раздавливания бруса, а от излома его.



Рис. 156.
Продольный изгиб.

Если постепенно увеличивать сжимающую силу, мы заметим сначала лишь незначительные отклонения оси бруса от ее первоначальной прямолинейной формы. Отклонения эти происходят вследствие того, что нельзя получить брус из совершенно однородного материала и осуществить нагружение такого бруса силами, идеально совпадающими с его осью. В этот период деформации форма нагруженного стержня устойчива; если отклонить брус от его положения равновесия, например несколько увеличить или уменьшить его прогиб, брус восстановит свою форму, когда давление прекратится. При дальнейшем увеличении сжимающей силы, как только последняя достигнет некоторой определенной величины, прогибы начинают очень быстро возрастать и брус ломается. Таким образом деформация устойчива только до тех пор, пока сжимающая сила не достигла определенного предела, называемого критическим.

Проделаем следующий простой опыт. Поставим на чашку весов стержень и подвергнем действию осевой силы, определяемой по указанию весов. Почти не меняя величины силы, можно весьма значительно увеличить стрелу прогиба (рис. 157). Следовательно, если имеем какой-нибудь длинный стержень, подверженный центральной сжимающей силе, нужно всегда следить, чтобы эта сила не достигла критического предела, при котором брусок начинает изгибаться.

Опасность продольного изгиба устраняется тем, что для сжатых стержней допускаемое напряжение назначается в зависимости от соотношения их длины и поперечного сечения. Напряжение это меньше допускаемого напряжения для очень короткого бруска, для которого можно не считаться с возможностью продольного изгиба.

Отношение этих двух напряжений, представляющее всегда правильную дробь, называется коэффициентом понижения допускаемого напряжения для сжатых стержней или коэффициентом

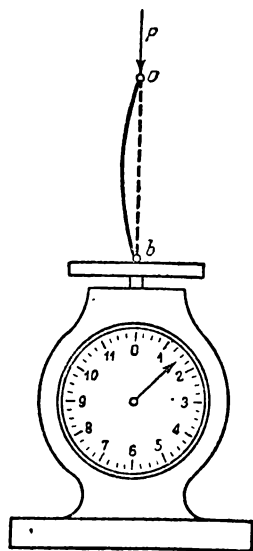


Рис. 157. Исследование продольного изгиба.

продольного изгиба и обозначается греческой буквой φ („фи“).

В нормах проектирования деревянных, металлических и других конструкций приводятся таблицы коэффициента φ . Одна из таких таблиц для расчета деревянных стоек дана ниже (табл. 3).

Таблица 3

Коэффициент продольного изгиба

Стойки круглого сечения	$\frac{l}{d}$	0	5	10	15	20	25	30
	φ	1,0	0,97	0,87	0,71	0,48	0,31	0,22
Стойки прямоугольного сечения	$\frac{l}{b}$	0	5	10	15	20	25	30
	φ	1,0	0,98	0,90	0,78	0,61	0,41	0,29

Верхняя половина таблицы содержит коэффициент φ для круглых стоек, снижающий основное допускаемое напряжение на сжатие в зависимости от отношения длины стойки l к диаметру d .

Например стойка диаметра $d = 20$ см имеет длину $l = 200$ см; тогда

$$\frac{l}{d} = \frac{200}{20} = 10.$$

Этому отношению соответствует $\varphi = 0,87$.

Допускаемое напряжение на сжатие составит:

$$\sigma_{сж} = 0,87 \cdot 100 = 87 \text{ кг/см}^2.$$

Нижняя половина таблицы содержит коэффициент φ для стоек прямоугольного сечения; коэффициент определяется в зависимости от отношения длины стойки l к меньшей стороне b ее сечения.

Например стойка сечением 20×15 см имеет длину 300 см. Тогда

$$\frac{l}{b} = \frac{300}{15} = 20;$$

этому отношению соответствует $\varphi = 0,61$.

Допускаемое напряжение на сжатие составит $0,61 \cdot 100 = 61 \text{ кг/см}^2$.

Пример. Стойка длиной $l = 420$ см несет нагрузку $p = 3600$ кг. Подобрать сечение стойки.

Решение. Если бы стойка работала на сжатие без продольного изгиба, то необходимая площадь F поперечного сечения была бы

$$F = \frac{P}{\sigma} = \frac{3600}{100} = 36 \text{ см}^2,$$

и следовательно сторона квадратного сечения составит:

$$a = \sqrt{36 \text{ см}^2} = 6 \text{ см}.$$

Такая тонкая стойка при длине 420 см сломается от продольного изгиба. Задаемся сечением стойки:

$$F = 14 \cdot 14 = 196 \text{ см}^2.$$

Отношение длины стойки l к ее стороне b составит:

$$\frac{l}{b} = \frac{420}{14} = 30.$$

По таблице находим коэффициент:

$$\varphi = 0,29.$$

Допускаемое напряжение:

$$\sigma_{см} = 0,29 \cdot 100 = 29 \text{ кг/см}^2.$$

Значит, на все сечение стойки можно допустить нагрузку:

$$P = 29 \cdot 196 = 5674 \text{ кг}.$$

Эта нагрузка больше заданной; оставляем без изменений намеченное сечение $14 \times 14 \text{ см}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Опишите общий характер деформации кручения.
2. В чем заключается порядок расчета на кручение?
3. Назовите примеры сложной деформации.
4. Как надлежит определять напряжения в случае сложной деформации бруса?
5. Опишите общий характер деформации продольного изгиба.
6. Каким образом учитывается в расчете действие продольного изгиба?

Глава 6. Фермы

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Стремление добиться лучшего использования материала в изгибаемом элементе обусловило появление балок двутаврового сечения. Но и в двутавровой балке вертикальная стенка поглощает значительное количество материала. Если же сплошную стенку заменить решеткой, надлежаще составленной из отдельных стержней, то конструкция с минимальной затратой материала будет нести значительную нагрузку.

Такие конструкции, состоящие из соединенных между собой стержней, работающих на растяжение или сжатие, называются фермами (рис. 158).

Приводим наименование отдельных элементов фермы.

Стержни, расположенные по верхнему контуру фермы, называются верхним поясом, расположенные по нижнему контуру — нижним поясом.

Внутренние стержни образуют собственно решетку фермы; вертикальные внутренние стержни называются стойками или подвесками, наклонные — диагоналями или раскосами.

Точки, в которых сходятся оси двух или нескольких стержней, носят название узлов фермы.

Те узлы фермы, которыми она опирается на основание, называются опорными узлами.

Расстояние между опорами фермы обозначается буквой l и называется пролетом фермы; h — высота фермы.

Чтобы стержни фермы работали только на растяжение или сжатие, необходимы два условия:

- 1) стержни в узлах должны быть связаны между собой шарнирами без трения;
- 2) силы должны быть приложены только в узлах фермы.

В отношении первого условия отметим, что шарнирное соединение стержней выполнить затруднительно; кроме того оно не достигает цели вследствие неизбежного трения при больших усилиях в элементах. Поэтому стержни стальных ферм соединяются посредством заклепок или сварки.

По поводу второго условия отметим следующее.

Тело, имеющее две точки, около которых оно может вращаться, будет оставаться в равновесии под действием двух сил, приложенных в этих точках, только тогда, когда силы равны и прямо противоположны, т. е. направлены по прямой, соединяющей две точки. Поэтому под действием двух равных и прямо противоположных сил каждый

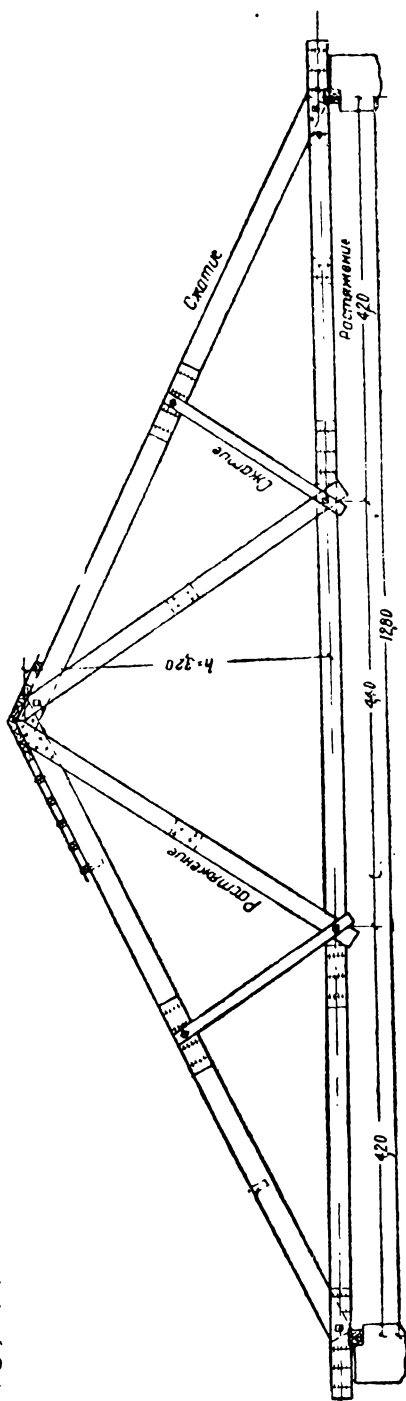


Рис. 158. Деревянная стропильная ферма пролетом 12,8 м

из стержней, составляющих ферму, может быть только растянут или сжат.

Если вершины (узлы) треугольников имеют шарниры и внешние силы приложены только в узлах, вся шарнирная система (ферма) является статически определимой, т. е. усилия всех составляющих ее стержней могут быть определены при помощи одних уравнений статики.

Заметим, что если взять первый треугольный элемент фермы, в котором имеются три узла и три стержня, и к нему присоединить второй элемент, то при этом присоединении получится один новый узел и два новых стержня. Для присоединения последующего элемента потребуется образование еще одного нового узла и двух новых стержней. Вообще для присоединения какого

угодно по порядку элемента к существующим необходимо образование одного узла, получающегося в пересечении двух новых стержней, что справедливо для всех элементов системы кроме первого, где трем узлам соответствуют три стержня.

Поэтому если число узлов будет n , а число стержней m , то у статически определимой фермы должна быть зависимость:

$$m = 2n - 3.$$

Если число стержней таково, то, выделяя отдельные узлы и составляя для них условия равновесия, получим достаточное число уравнений, из которых напряжения стержней могут быть определены.

Ознакомимся с распределением усилий сжатия и растяжения в стержнях ферм. Рассмотрим ферму, схематически изображенную

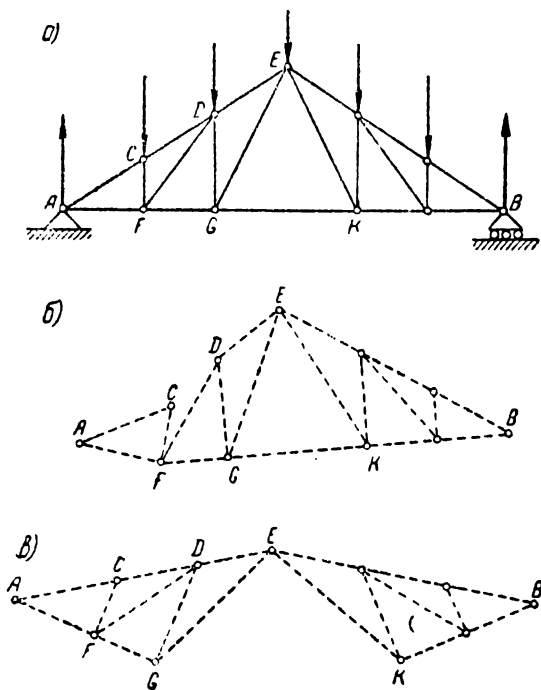


Рис. 159. Выяснение работы поясов фермы.

на рис. 159,а. Под действием вертикальной нагрузки в стержнях фермы возникнут усилия. Для выяснения характера усилий в верхнем поясе мысленно отбросим какой-нибудь его стержень, например CD . Удаление стержня из фермы должно вызвать обрушение ее; при этом узлы C и D будут сближаться. Положение фермы в начале обрушения показано пунктиром (рис. 159,б). Чтобы ферма не обрушилась, надо вместо стержня CD приложить две силы, которые раздвигали бы эти узлы. Таким образом видим, что стержень CD до выбрасывания его раздвигал узлы C и D и подвергался сжатию. Эти рассуждения можно применить к любому стержню верхнего пояса фермы. Вообще стержни верхнего пояса ферм работают на сжатие при нагрузке, направленной вертикально вниз.

Для определения характера усилий в нижнем поясе той же

фермы мысленно отбросим какой-нибудь стержень, например GK . Положение фермы при начале обрушения показано на рис. 150,в пунктиром. Узлы G и K разошлись. Следовательно стержень GK до выбрасывания из фермы стягивал узлы G и K , т. е. подвергался растяжению.

Это рассуждение применимо в отношении любого стержня нижнего пояса.

Вообще стержни нижнего пояса ферм работают на растяжение при нагрузке, направленной вертикально вниз.

В стойках и раскосах в зависимости от направления этих стержней происходит растяжение или сжатие.

Рассмотрим ферму с раскосами, восходящими к середине пролета (рис. 160).

Для определения направления усилий в стойке CF мысленно отбросим этот стержень. Под влиянием вертикальной нагрузки, направленной сверху вниз, стержень AD изогнется и точка C должна переместиться вниз (пунктир на рис. 160,а).

В действительности точка C вниз не перемещается. Следовательно стержень AD поддерживается стержнем CF , а поэтому стойка CF работает на сжатие.

Рассуждая таким же образом, находим, что в ферме с нисходящими раскосами (рис. 160,б) раскос CF работает на сжатие.

Под влиянием сжимающего усилия в стержне CF (рис. 160,а) точка F должна переместиться вниз. В конструкции точка F вниз не перемещается. Следовательно сжимающему усилию в стержне CF должно противостоять растягивающее усилие раскоса FD .

Рассуждая таким же образом, находим, что в ферме с нисходящими раскосами (рис. 160,б) усилие стойки DF противостоит сжимающему усилию раскоса CF , т. е. стойка DF работает на растяжение.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ МЕТОДОМ ВЫРЕЗАНИЯ УЗЛОВ.

Определение усилий в стержнях фермы сводится к применению условий равновесия, даваемых статикой. В начале курса (гл. 2) мы уже решали такие задачи построением соответствующего многоугольника сил для отдельных узлов ферм, определяя затем по масштабу величину и направление сил. Этот прием называется методом вырезания узлов.

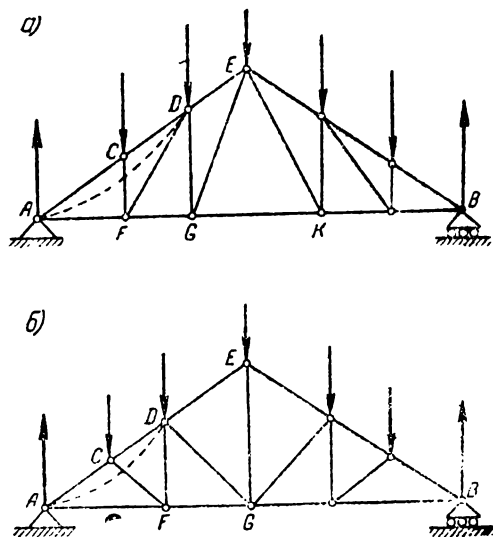


Рис. 160. Выяснение работы решетки фермы.

Пусть из данной нагруженной фермы мы вырезали какой-нибудь узел (рис. 161), в котором сходятся четыре стержня, причем усилия в стержнях 3 и 4 нам неизвестны.

Обозначим известные усилия соответственно через S_1 и S_2 , а искомые через S_3 и S_4 .

Для равновесия узла необходимо и достаточно, чтобы многоугольник, построенный на этих силах, был замкнут. Для построения многоугольника отложим от какой-нибудь точки O одну за другой известные нам силы P , S_1 и S_2 . Затем из конца

силы S_2 и из начала силы P проводим прямые, параллельные неизвестным усилиям S_3 и S_4 до их взаимного пересечения в точке d .

Величины этих усилий определяются из многоугольника отрезками cd и do , а направления их — из кругового обхода стрелок. Перенеся эти направления с многоугольника на узел, заключаем, что стержни 3 и 4 сжаты. Таким образом мы сможем уравновесить любой узел фермы, но при условии, чтобы в нем сходились не более двух неизвестных по усилию стержней.

Применим указанный прием для определения усилий в стержнях простой стропильной фермы, нагруженной в верхних узлах тремя равными силами $P=2000$ кг (рис. 162).

Прежде всего нужно найти реакции опор фермы подобно тому, как это делается в отношении балок.

Рис. 161. Определение усилий в стержнях фермы.

Определение опорных реакций выполняется посредством уравнений статики.

Вертикальные нагрузки, симметрично приложенные в узлах фермы, вызывают равные реакции опор. В случае, если вертикальные нагрузки приложены несимметрично, то реакции опор обратно пропорциональны расстоянию нагрузки от опоры.

В нашем примере из условий симметрии заключаем, что опорные реакции равны:

$$Q_A = Q_B = \frac{3}{2} P = 3000 \text{ кг.}$$

Начнем определение усилий с опорного узла A , где сходятся два стержня 1 и 2.

Построив треугольник сил abc , найдем по величине и направлению усилия $S_1 = 4700$ и $S_2 = 5800$ (стрелки на треугольнике ставим по обводу, зная направление силы Q_A).

Чтобы узнать, сжат ли стержень или растянут, надо из силового треугольника перенести направление силы на узел, мысленно вырезав последний.

Если сила направлена на узел, то стержень сжат, если от узла — стержень растянут.

В нашем случае стержень 1 растянут, а стержень 2 сжат (рис. 163).

Переходим к узлу C , в котором сходятся стержни 2, 3, 4, и сила P (к узлу D перейти нельзя, так как из четырех сходящихся в нем стержней три неизвестны).

Усилие сжатого стержня 2 должно быть направлено к узлу, а по величине равно стороне cb треугольника abc , построенного для узла A . Неизвестными в узле C являются усилия стержней 3 и 4. Эти усилия определим, построив соответствующий замкнутый четырехугольник $defg$.

Перенеся направления найденных усилий S_3 и $S_4 = 4500$ на узел, найдем, что стержни 3 и 4 сжаты.

Наконец переходим к узлу D , где сходятся стержни 1, 3, 5 и 6, в которых неизвестны усилия S_5 и S_6 . Построив многоугольник $klmn$, найдем усилия $S_5 = 1800$ и $S_6 = 3000$. Стрелки у S_5 и S_6 , перенесенные на вырезанный узел D , указывают на то, что стержни 5 и 6 растянуты.

Усилия в стержнях правой половины фермы по условиям симметрии будут равны усилиям соответствующих стержней левой половины.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ МЕТОДОМ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

Изложим второй способ определения усилий в стержнях ферм, называемый методом Риттера¹, или методом статических моментов. Он состоит в следующем.

¹ Риттер — немецкий ученый — обосновал свой метод в 70 гг. прошлого столетия.

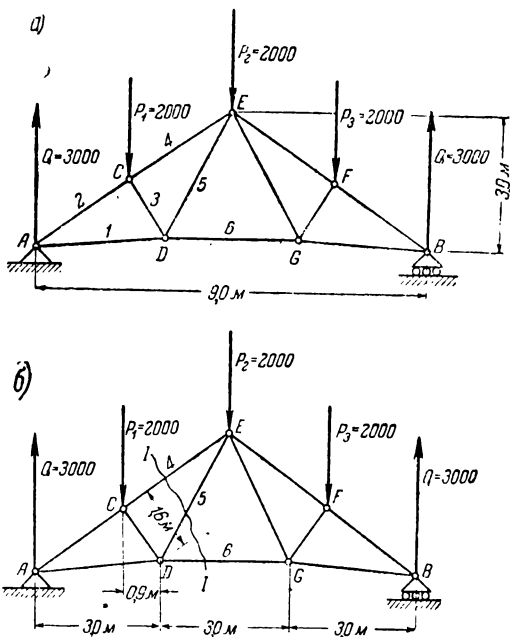


Рис. 162. Расчетная схема фермы.

Для определения усилий в стержнях фермы мысленно разрезаем ее по стержням, усилия в которых желаем определить, на две части и рассматриваем равновесие одной из этих частей.

Так как число уравнений равновесия сил равно трем, то для решения задачи, вообще говоря, число перерезанных стержней должно быть не более трех. Заметим, что методом разрезов, иначе называемым методом сечений, мы уже пользовались при определении внутренних сил, которые появляются внутри тела

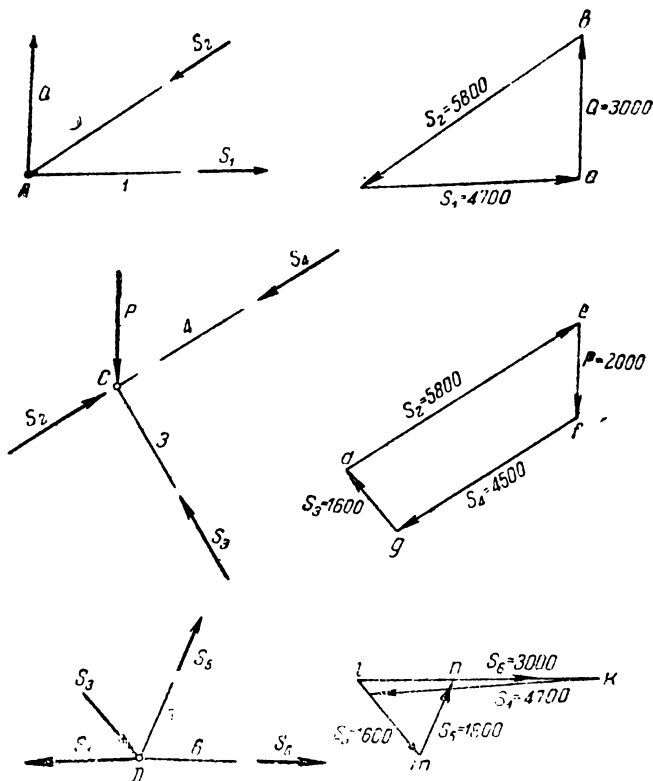


Рис. 163. Определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов.

под действием внешних сил. В нашем случае усилия в стержнях фермы по отношению ко всей системе являются силами внутренними; нагрузки же, действующие на ферму, включая и опорные реакции, представляют собой силы внешние.

Способ Риттера имеет то преимущество, что дает возможность определить усилие в любом стержне независимо от усилий в остальных стержнях. Обратимся вновь к ферме рассмотренной в предыдущем параграфе (рис. 162, б). Проведем поверхность I-I, которая перерезает три стержня фермы. Их неизвестные усилия обозначим через S_4 , S_5 , S_6 .

Для определения S_4 напомним условие равновесия сил, приложенных к левой отрезанной части фермы.

Это условие, заключается в том, чтобы сумма моментов всех сил, к ней приложенных, т. е. Q , P , S_4 , S_5 , S_6 , относительно точки A равнялась нулю.

Моменты усилий S_5 и S_6 равны нулю, так как эти усилия проходят через центр моментов D . Значит, в уравнение войдет только одно неизвестное S_4 , которое мы и определим.

Напишем сумму моментов сил P и Q и усилия S_4 относительно точки D :

$$M_P + M_Q + M_{S_4} = 0. \quad (a)$$

Величины сил P и Q известны; их плечи определим по чертежу. Обратим внимание на то, что M_P направлен против часовой стрелки, следовательно момент отрицательный, наоборот, M_Q — положительный.

$$\text{Имеем: } 0,9 \cdot 2000 + 3 \cdot 3000 + M_{S_4} = 0.$$

$$\text{Откуда } M_{S_4} = -7200 \text{ кгм.}$$

Плечо усилия d находим по чертежу: $d = 1,6 \text{ м.}$

Так как

$$S_4 = \frac{M_{S_4}}{d},$$

то $S_4 = -7200 : 1,6 = -4500 \text{ кг.}$

Знак минус означает, что стержень 4 сжат.

Полученный результат в точности соответствует найденному по методу вырезания узлов.

Для нахождения S_5 напомним, что сумма моментов всех сил относительно точки A равна нулю. Точно так же для нахождения S_6 напомним условие моментов всех сил относительно точки E . Усилия S_4 , S_5 и S_6 будем предварительно считать направленными, как указано на чертеже.

Если в конце вычисления окажется, что перед найденным усилием стоит знак плюс (+), то это будет означать, что найденное усилие представляет собой растяжение. Знак минус (—) будет означать сжатие.

Зная величину действующих в стержнях усилий, мы можем подобрать сечение стержней согласно допускаемым напряжениям для данного материала. Подбор сечений ферм подробно излагается в специальных курсах.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие конструкции называются фермами?
 2. Как работают стержни верхнего и нижнего поясов фермы?
 3. В чем заключается метод вырезания узлов?
 4. В чем заключается метод статических моментов?
-

Алфавит латинский

Алфавит греческий

A a (а)	N n (эн)	Α α (альфа)	Ν ν (ни)
B b (бэ)	O o (о)	Β β (бэта)	Ξ ξ (кси)
C c (цэ)	P p (пэ)	Γ γ (гамма)	Ο ο (омикрон)
D d (дэ)	Q q (ку)	Δ δ (дэльта)	Π π (пи)
E e (э)	R r (эр)	Ε ε (эпсилон)	Ρ ρ (ро)
F f (эф)	S s (эс)	Ζ ζ (дзэта)	Σ σ (сигма)
G g (гэ)	T t (тэ)	Η η (эта)	Τ τ (тау)
H h (аш)	U u (у)	Θ θ (тэта)	Υ υ (ипсилон)
I i (и)	V v (вэ)	Ι ι (иота)	Φ φ (фи)
J j (йот)	W w (дубльвэ)	Κ κ (каппа)	Χ χ (хи)
K k (ка)	X x̄ (икс)	Λ λ (ламбда)	Ψ ψ (пси)
L l (эль)	Y y (игрек)	Μ μ (ми)	Ω ω (омега)
M m (эм)	Z z (зет)		

ОПЕЧАТКИ

<i>Стр.</i>	<i>Строка</i>	<i>Напечатано</i>	<i>Должно быть</i>
9	1 и 2 сверху	Коперника уничтожающей	Коперника и уничтожающей
46	9 сверху	момент который равен	момент которой равен
48	9 снизу	направлена к плоскости	направлена перпендикулярно к плоскости

Нейштадт. Зак. 6432.

Цена 4 р. 60 к.
С - 30 - 3 - 2

046

инж. А. И. НЕЙШТАДТ



ЭЛЕМЕНТЫ
ТЕХНИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКИ

СТРОЙИЗДАТ
НАРКОМСТРОЯ
1941